TABLA DE MATERII

PARTEA DOUA

Funcții de mai multe variabile

Aplicații

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A DOUA

Ținînd seamă de dorința mai multor profesori, am mărit simțitor, în ediția a doua a culegerii, numărul exercițiilor algoritmice referitoare la diferitele ramuri ale analizei matematice, și anume: am adăugat mai mult de o mie de probleme și exemple, mai ales exerciții, cu privire la găsirea limitelor, derivare, integrale nedefinite și definite, serii și schimbarea de variabile. In același timp, am scos, din diferite considerente, anumite probleme. Avînd în vedere caracterul obișnuit de expunere a materialului, am modificat în cap. IV și V ordinea paragrafelor. In afară de aceasta, în anumite locuri din culegere au fost precizate titlurile. Ca și în prima ediție, am acordat o atenție deosebită formulărilor exacte și precizărilor detaliate ale condițiilor în care este valabilă formula respectivă. Pentru comoditatea folosirii culegerii am introdus o numerotare în continuare a problemelor. La sfîrșitul culegerii a fost adăugată o anexă conținînd constantele cele mai importante și tabelele funcțiilor celor mai uzuale.

Aduc mulțumiri docenților catedrei de analiză matematică a Universității de Stat Lomonosov din Moscova, I. D. Eisenstadt și Z. M. Kișkin, pentru faptul că au revizuit manuscrisul ediției a doua.

Moscova 1953

B. P. Demidovici

PARTEA ÎNTÎI

FUNCȚII DE O VARIABILĂ

CAPITOLUL I

INTRODUCERE ÎN ANALIZĂ

§ 1. Numere reale

1°. Metoda inducției complete. Pentru a demonstra că o anumită teoremă este valabilă pentru orice număr natural n este suficient să demonstrăm că: 1) această teoremă este valabilă pentru $n=1$ și 2) dacă această teoremă este valabilă pentru orice număr natural n, atunci ea rămîne valabilă și pentru numărul natural următor $n+1$.

2°. Tăietură. Impărțirea numerelor raționale în două clase A și B se numește *tăietură* dacă sînt satisfăcute următoarele condiții: 1) ambele clase nu sînt vide; 2) orice număr rațional este conținut într-o clasă și numai într-una singură și 3) orice număr aparținînd clasei A (*clasa inferioară*) este mai mic decît orice număr aparținînd clasei B (*clasa superioară*). Tăietura A/B definește: a) un număr rațional, de îndată ce clasa inferioară A admite un număr mai mare decît toate numerele din A, sau de îndată ce clasa superioară B admite un număr mai mic decît toate numerele din B și b) un număr irațional, de îndată ce clasa A nu admite un număr mai mare decît toate numerele din A, iar clasa B nu admite un număr mai mic decît toate numerele din B. Numerele raționale și iraționale se numesc *numere reale* [1]).

3°. Valoare absolută. Dacă x este un număr real, numim *valoare absolută* $|x|$ numărul nenegativ definit de următoarele condiții:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dacă } x < 0 \\ x, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Pentru orice pereche de numere reale x și y are loc inegalitatea

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

4°. Margine superioară și margine inferioară. Fie $X=\{x\}$ o mulțime mărginită de numere reale. Numărul

$$m = \inf\{x\}$$

se numeşte *margine inferioară* a mulţimii X, dacă:

1) orice $x \in X$ [1]) satisface inegalitatea

$$x \geq m;$$

2) oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $x' \in X$, astfel încît

$$x' < m + \varepsilon.$$

In mod analog vom spune că numărul

$$M = \sup \{ x \}$$

este *marginea superioară* a mulţimii X, dacă:

1) orice $x \in X$ verifică inegalitatea

$$x \leq M;$$

2) pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $x'' \in X$, astfel încît

$$x'' > M - \varepsilon.$$

Dacă mulţimea X nu este mărginită inferior, convenim să scriem:

$$\inf \{ x \} = -\infty;$$

dacă mulţimea X nu este mărginită superior, scriem:

$$\sup \{ x \} = +\infty.$$

5°. Eroare absolută şi eroare relativă. Dacă a $(a \neq 0)$ este valoarea exactă a mărimii pe care vrem s-o măsurăm şi x este valoarea aproximativă a acestei mărimi, atunci expresia

$$\Delta = | x - a |$$

se numeşte *eroare absolută*, iar expresia

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|},$$

eroarea relativă a mărimii pe care o măsurăm.

Vom spune că numărul x are n cifre exacte dacă eroarea absolută a acestui număr nu depăşeşte jumătatea unităţii ordinului exprimat prin a n-a cifră semnificativă.

Aplicînd metoda inducţiei complete, să se demonstreze că pentru orice număr natural n sînt valabile următoarele egalităţi:

1. $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

[1]) Prin notaţia $x \in X$ se înţelege că x aparţine mulţimii X.

3. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

4. $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

5. Fie

$$a^{[n]} = a(a-h)\ldots[a-(n-1)h] \quad \text{şi} \quad a^{[0]} = 1.$$

Să se demonstreze că

$$(a+b)^{[n]} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]},$$

unde C_n^m este numărul combinărilor de n elemente luate cîte m. Să se deducă de aici formula *binomului lui Newton*.

6. Să se demonstreze *inegalitatea lui Bernoulli*:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

unde numerele $x_1, x_2, \ldots x_n$ au acelaşi semn, fiind toate mai mari decît -1.

7. Să se demonstreze că pentru $x > -1$ este satisfăcută inegalitatea

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad (n > 1),$$

egalitatea avînd loc numai pentru $x = 0$.

8. Să se demonstreze inegalitatea

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{pentru} \quad n > 1.$$

Indicaţie. Se va folosi inegalitatea

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 2 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

9. Să se demonstreze inegalitatea

$$2!\cdot 4!\ldots(2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{pentru} \quad n > 1.$$

10. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

11. Fie c un număr întreg pozitiv care nu este un pătrat perfect şi A/B tăietura care defineşte numărul real $\sqrt{c}$. In clasa B sînt cuprinse toate numerele raţionale pozitive b pentru care $b^2>c$, iar în clasa A toate celelalte numere raţionale. Să se demonstreze că în clasa A nu există un număr mai mare decît toate numerele din A şi că în clasa B nu există un număr mai mic decît toate numerele din B.

12. Tăietura A/B, care defineşte numărul $\sqrt[3]{2}$, se construieşte în modul următor: clasa A conţine toate numerele raţionale a pentru care $a^3<2$; clasa B conţine toate celelalte numere raţionale. Să se demonstreze că în clasa A nu există un număr mai mare decît toate numerele din clasa A şi că în clasa B nu există un număr mai mic decît toate numerele din clasa B.

13. Construind tăieturile corespunzătoare, să se demonstreze egalităţile:

$$\text{a) } \sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}; \quad \text{b) } \sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}.$$

14. Să se construiască tăietura care defineşte numărul $2^{\sqrt{2}}$.

15. Să se demonstreze că orice mulţime de numere, nevidă, mărginită inferior are o margine inferioară şi că orice mulţime nevidă mărginită superior are o margine superioară.

16. Să se arate că mulţimea tuturor fracţiilor raţionale subunitare

$$\frac{m}{n},$$

m şi n fiind numere naturale şi $0<m<n$, nu conţine un element care să fie mai mare decît toate elementele mulţimii şi nici un element care să fie mai mic decît toate elementele mulţimii. Să se găsească marginea inferioară şi marginea superioară a acestei mulţimi.

17. Să se determine marginea inferioară şi marginea superioară a mulţimii numerelor raţionale r, care verifică inegalitatea

$$r^2<2.$$

18. Fie $\{-x\}$ mulţimea numerelor opuse numerelor $x\in\{x\}$. Să se demonstreze că:

$$\text{a) } \inf\{-x\}=-\sup\{x\}; \quad \text{b) } \sup\{-x\}=-\inf\{x\}.$$

19. Fie $\{x+y\}$ mulţimea *tuturor* sumelor $x+y$, unde $x\in\{x\}$ şi $y\in\{y\}$.

Să se demonstreze egalităţile:

a) $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$;

b) $\sup\{x+y\}=\sup\{x\}+\sup\{y\}$.

20. Fie $\{xy\}$ mulţimea tuturor produselor xy, unde $x\in\{x\}$ şi $y\in\{y\}$, în care $x\geq 0$ şi $y\geq 0$.

Să se demonstreze egalităţile:

a) $\inf\{xy\}=\inf\{x\}\cdot\inf\{y\}$; b) $\sup\{xy\}=\sup\{x\}\cdot\sup\{y\}$.

21. Să se demonstreze inegalităţile:

a) $|x-y|\geq ||x|-|y||$;

b) $|x+x_1+\ldots+x_n|\geq |x|-(|x_1|+\ldots+|x_n|)$.

Să se rezolve inegalităţile:

22. $|x+1|<0{,}01$.

23. $|x-2|\geq 10$.

24. $|x|>|x+1|$.

25. $|2x-1|<|x-1|$.

26. $|x+2|+|x-2|\leq 12$.

27. $|x+2|-|x|>1$.

28. $||x+1|-|x-1||<1$.

29. $|x(1-x)|<0{,}05$.

30. Să se demonstreze identitatea

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

31. Măsurînd o lungime de 10 cm, eroarea absolută a fost de 0,5 mm; măsurînd o distanţă de 500 km, eroarea absolută a fost de 200 m. Care din aceste două măsurători este mai exactă?

32. Să se determine cîte cifre exacte conţine numărul

$$x=2{,}375\,2,$$

dacă eroarea relativă a acestui număr este de 1%?

33. Numărul

$$x=12{,}125$$

conţine trei cifre exacte. Să se determine eroarea relativă a acestui număr.

34. Laturile unui dreptunghi sînt:

$$x = 2{,}50 \text{ cm} \pm 0{,}01 \text{ cm},$$
$$y = 4{,}00 \text{ cm} \pm 0{,}02 \text{ cm}.$$

Intre ce limite este cuprinsă aria S a acestui dreptunghi? Care este eroarea absolută Δ şi eroarea relativă δ a ariei dreptunghiului, atunci cînd considerăm laturile sale egale cu valorile medii?

35. Greutatea unui corp este $p = 12{,}59\ g \pm 0{,}01$ g, iar volumul său este $V = 3{,}2$ cm$^3 \pm 0{,}2$ cm^3. Să se determine greutatea specifică a corpului şi să se evalueze eroarea absolută şi cea relativă a greutăţii specifice, dacă considerăm pentru greutatea şi volumul corpului, valorile lor medii.

36. Raza unui cerc este

$$r = 7{,}2 \text{ m} \pm 0{,}1 \text{ m}.$$

Cu ce eroare relativă minimă putem determina aria cercului, dacă luăm $\pi = 3{,}14$?

37. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt:

$$x = 24{,}7 \text{ m} \pm 0{,}2 \text{ m},$$
$$y = 6{,}5 \text{ m} \pm 0{,}1 \text{ m},$$
$$z = 1{,}2 \text{ m} \pm 0{,}1 \text{ m}.$$

Intre ce limite variază volumul acestui paralelipiped? Cu ce eroare absolută şi cu ce eroare relativă poate fi determinat volumul acestui paralelipiped, dacă luăm pentru dimensiunile sale valorile medii?

38. Cu ce eroare absolută trebuie măsurată latura pătratului x, unde $2 \text{ m} < x < 3$ m, pentru a putea determina aria acestui pătrat cu o aproximaţie de $0{,}001$ m^2?

39. Cu ce erori absolute Δ este suficient să măsurăm laturile x şi y ale unui dreptunghi pentru a putea calcula aria sa cu o aproximaţie de $0{,}01$ m^2, admiţînd, spre orientare, că laturile dreptunghiului nu sînt mai mari decît 10 m fiecare?

40. Fie $\delta(x)$ şi $\delta(y)$ erorile relative ale numerelor x şi y, $\delta(xy)$ eroarea relativă a numărului xy.

Să se demonstreze că

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\,\delta(y).$$

§ 2. Teoria şirurilor

1°. Noţiunea de limită a unui şir. Vom spune că şirul $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ are ca limită numărul a (mai scurt, *tinde către a*), adică

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N = N(\varepsilon)$ pentru care

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ de îndată ce } n > N.$$

Se spune, în particular, că x_n este un *infinit mic* dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Un şir care nu are limită se numeşte *divergent*.

2°. Criterii de existenţă a limitei.

1) Dacă

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

şi

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

2) Un şir monoton şi mărginit are o limită.

3) Criteriul lui Cauchy. Pentru ca şirul x_n să aibă o limită este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un număr $N = N(\varepsilon)$, astfel încît

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

de îndată ce $n > N$ şi $p > 0$.

3°. Teoreme fundamentale în legătură cu limitele şirurilor. Presupunînd că există

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} y_n,$$

avem:

1) dacă $x_n \leq y_n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

4°. **Numărul** e. Şirul

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (n=1,\ 2,\ldots)$$

are limita finită

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\,281\,828\,4\ldots$$

5°. **Limita infinită.** Notaţia simbolică

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$$

înseamnă că, oricare ar fi $E>0$, există un număr $N=N(E)$ astfel încît

$$|x_n|>E \quad \text{pentru} \quad n>N.$$

6°. **Punct limită.** Vom numi numărul ξ (sau simbolul ∞) *limită parţială (punct limită)* a şirului dat x_n $(n=1,\ 2,\ldots)$, dacă există un subşir

$$x_{p_1},\ x_{p_2},\ldots,\ x_{p_n},\ldots$$

astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n}=\xi.$$

Orice şir mărginit are cel puţin o limită parţială finită *(principiul lui Bolzano-Weierstrass)*. Dacă această limită parţială este unică, ea este chiar limita finită a şirului dat.

Cea mai mică limită parţială (finită sau infinită) a şirului x_n, pe care o notăm cu

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n,$$

se numeşte *limită inferioară*, iar cea mai mare limită parţială a lui x_n, pe care o notăm cu

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n,$$

se numeşte *limita superioară* a acestui şir.

Egalitatea

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}\ x_n,$$

este condiţia necesară şi suficientă pentru ca limita (finită sau infinită) a şirului x_n să existe.

41. Fie

$$x_n=\frac{n}{n+1} \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1,$$

determinînd pentru fiecare $\varepsilon>0$ un număr $N=N(\varepsilon)$, astfel încît

$$|x_n-1|<\varepsilon, \quad \text{dacă} \quad n>N.$$

Să se completeze următoarea tabelă:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N					

42. Să se demonstreze că x_n $(n=1,\ 2,\ldots)$ este un *infinit mi* (adică are limita egală cu 0), determinînd pentru fiecare $\varepsilon>0$ numărul $N=N(\varepsilon)$ pentru care $|x_n|<\varepsilon$, de îndată ce $n>N$, dacă

a) $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; c) $x_n=\dfrac{1}{n!}$;

b) $x_n=\dfrac{2}{n^3+1}$; d) $x_n=(-1)^n\cdot 0{,}999^n$.

Să se completeze pentru fiecare din aceste cazuri următoarea tabelă:

ε	0,1	0,001	0,000 1	...
N				

43. Să se demonstreze că şirurile

a) $x_n=(-1)^n n$, b) $x_n=2^{\sqrt{n}}$, c) $x_n=\lg(\lg n)$ $(n\geq 2)$

au limita infinită pentru $n\to\infty$ (adică *devin infinit mari*), determinînd pentru fiecare $E>0$ numărul $N=N(E)$, astfel încît $|x_n|>E$ pentru $n>N$.

Să se completeze pentru fiecare din aceste cazuri următoarea tabelă:

E	10	100	1 000	10 000	...
N					

44. Să se arate că şirul

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n=1,\ 2, \ldots)$$

nu este mărginit, totuşi nu tinde către infinit pentru $n \to \infty$.

45. Să se formuleze cu ajutorul inegalităţilor următoarele afirmaţii:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Presupunînd că n parcurge şirul numerelor naturale, să se determine valorile următoarelor expresii:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10\,000n}{n^2+1}$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1}$.

49. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ $(|a|<1,\ |b|<1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + \ldots + \dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2} \ldots \sqrt[2^n]{2})$.

... egalităţi:

58. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ $(a>1)$.

61. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, dacă $|q|<1$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a>0)$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$ $(a>1)$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

67. Care din următoarele expresii este mai mare pentru n ...ficient de mare:

... $100n+200$ sau $0{,}01n^2$?; b) 2^n sau $n^{1\,000}$?; c) $1\,000^n$ sau $n!$?

68. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}\right) = 0.$$

Indicaţie. V. exerciţiul 10.

69. Să se demonstreze că şirul

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,\ 2, \ldots)$$

...reşte monoton şi este mărginit superior, iar şirul

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,\ 2, \ldots)$$

...escreşte monoton şi este mărginit inferior. Să se deducă de aici ...ă aceste şiruri au limita comună

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Indicaţie. Se consideră rapoartele $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $\dfrac{y_n}{y_{n-1}}$ şi se ţine seama de ...negalitatea de la exerciţiul 7.

70. Să se demonstreze că

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Pentru ce valori ale exponentului n expresia $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ diferă de mărul e cu mai puțin decît 0,001?

71. Fie p_n $(n=1, 2, \ldots)$ un şir oarecare de numere care ti către $+\infty$, şi q_n $(n=1, 2, \ldots)$ un şir oarecare de numere tinz către $-\infty$. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

72. Ştiind că

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Să se deducă de aici formula

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}, \qquad ($$

unde $0 < \theta_n < 1$, şi să se calculeze numărul e cu exactitate de 10^-

73. Să se demonstreze că numărul e este irațional.

74. Să se demonstreze inegalitatea

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Să se demonstreze inegalitățile:

$$\text{a)} \quad \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

n fiind un număr natural arbitrar;

$$\text{b)} \quad 1 + \alpha < e^\alpha,$$

α fiind un număr real diferit de zero

76. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \ln a \qquad (a > 0),$$

fiind logaritmul numărului a în baza $e = 2{,}718\ldots$

Folosind teorema care afirmă că un şir monoton şi mărginit o limită, să se demonstreze convergența următoarelor şiruri:

77. $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \ldots + \frac{p_n}{10^n} \qquad (n=1, 2, \ldots),$

p_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$ sînt numere întregi nenegative, care ince- cu p_1 nu depăşesc numărul 9.

78. $x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}.$

79. $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$

80. $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$

81. $x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \ldots, x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{\text{de } n \text{ ori}}, \ldots$

Folosind criteriul lui Cauchy, să se demonstreze convergența itoarelor şiruri:

82. $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n,$

$$|a_k| < M \qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \quad \text{şi} \quad |q| < 1.$$

83. $x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$

84. $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$

Indicație. Se va folosi inegalitatea

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

86. Se spune că şirul $x_n (n=1, 2,\ldots)$ are *variaţia mărginită* dacă există un număr C, astfel încît

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\ldots+|x_n-x_{n-1}|<C \qquad (n=2, 3,\ldots).$$

Să se demonstreze că un şir cu variaţie mărginită este convergent.

Să se construiască un exemplu de şir convergent care să nu aibă variaţia mărginită.

87. Să se arate ce semnificaţie are pentru un şir dat faptul că nu este satisfăcut criteriul lui Cauchy.

88. Folosind criteriul lui Cauchy să se arate că şirul

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

este divergent.

89. Să se demonstreze că dacă şirul $x_n (n=1, 2,\ldots)$ este convergent, atunci orice subşir al său x_{p_n} este şi el convergent, avînd aceeaşi limită:

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n}=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

90. Să se demonstreze că un şir monoton este convergent dacă este convergent un anumit subşir al lui.

91. Să se demonstreze că dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|a|.$$

92. Dacă $x_n\to a$, atunci ce se poate spune despre limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}?$$

93. Să se demonstreze că un şir de numere convergent este mărginit.

94. Să se demonstreze că un şir de numere convergent îşi atinge fie marginea superioară, fie marginea inferioară, fie ambele margini. Să se construiască exemple de şiruri făcînd parte din cele trei tipuri.

95. Să se demonstreze că un şir de numere $x_n (n=1, 2,\ldots)$ care tinde către $+\infty$, îşi atinge neapărat marginea inferioară.

Să se afle termenul cel mai mare al şirului $x_n (n=1, 2,\ldots)$, dacă

96. $x_n=\frac{n^2}{2^n}$. 97. $x_n=\frac{\sqrt{n}}{100+n}$. 98. $x_n=\frac{1\,000^n}{n!}$.

Să se afle termenul cel mai mic al şirului $x_n (n=1, 2,\ldots)$, dacă

99. $x_n=n^2-9n-100$. 100. $x_n=n+\frac{100}{n}$.

Să se determine $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ pentru şirul $x_n (n=1, 2,\ldots)$, dacă:

101. $x_n=1-\frac{1}{n}$. 102. $x_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$.

103. $x_n=1+\frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

104. $x_n=1+2(-1)^{n+1}+3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

105. $x_n=\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$. 108. $x_n=n^{(-1)^n}$.

106. $x_n=(-1)^n n$. 109. $x_n=1+n\sin\frac{n\pi}{2}$.

107. $x_n=-n[2+(-1)^n]$. 110. $x_n=\frac{1}{n-10{,}2}$.

Să se afle $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, dacă:

111. $x_n=\frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

112. $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{4}$.

113. $x_n=\frac{n}{n+1}\sin^2\frac{n\pi}{4}$. 114. $x_n=\sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$.

115. $x_n=\cos^n\frac{2n\pi}{3}$.

Să se afle limitele parţiale ale următoarelor şiruri:

116. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$

117. $1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$

118. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$

119. $x_n = 3\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n$.

120. $x_n = \frac{1}{2}[(a+b)+(-1)^n(a-b)]$.

121. Să se construiască un exemplu de şir numeric avînd drept limite parţiale numere date:

$$a_1, \quad a_2, \ldots, a_p.$$

122. Să se construiască un exemplu de şir numeric pentru care toţi termenii unui şir numeric dat

$$a_1, \quad a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

să fie limitele sale parţiale. Ce alte limite parţiale mai trebuie să aibă neapărat şirul dat?

123. Să se construiască exemple de şiruri:

a) care să nu aibă limite parţiale finite;

b) care să aibă o limită parţială finită unică, dar care să nu fie convergent;

c) care să aibă o infinitate de limite parţiale;

d) care să aibă ca limită parţială orice număr real.

124. Să se demonstreze că şirurile x_n şi $y_n = x_n\sqrt[n]{n}\,(n=1, 2, \ldots)$ au aceleaşi limite parţiale.

125. Să se demonstreze că dintr-un şir mărginit $x_n\,(n=1, 2, \ldots)$ se poate extrage întotdeauna un subşir convergent $x_{p_n}\,(n=1, 2, \ldots)$.

126. Să se demonstreze că dacă şirul $x_n\,(n=1, 2, \ldots)$ nu este mărginit, atunci există un subşir x_{p_n} pentru care

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty.$$

127. Să presupunem că şirul $x_n\,(n=1, 2, \ldots)$ este convergent, iar şirul $y_n\,(n=1, 2, \ldots)$ este divergent. Ce se poate spune despre convergenţa şirurilor

a) x_n+y_n; b) $x_n y_n$?

Să se dea exemple corespunzătoare.

128. Să presupunem că şirurile x_n şi $y_n\,(n=1, 2, \ldots)$ sînt divergente. Se poate spune oare că şirurile

a) x_n+y_n; b) $x_n y_n$

sînt şi ele divergente?

Să se dea exemple corespunzătoare.

129. Fie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

şi $y_n\,(n=1, 2, \ldots)$ un şir arbitrar. Putem spune oare că

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0?$$

Să se dea exemple corespunzătoare.

130. Fie

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Rezultă oare de aici una din alternativele $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$? Să se studieze exemplul: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

131. Să se demonstreze că

a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leq \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

şi

$$\text{b) } \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n.$$

Să se construiască exemple pentru care în relaţiile de mai sus avem inegalităţi stricte.

132. Fie $x_n \geq 0$ şi $y_n \geq 0$ $(n=1,2,\ldots)$. Să se demonstreze că

$$\text{a) } \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

şi

$$\text{b) } \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n.$$

Să se construiască exemple pentru care în relaţiile de mai sus avem inegalităţi stricte.

133. Să se demonstreze că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există, avem, oricare ar fi şirul y_n $(n=1, 2,\ldots)$,

$$\text{a) } \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

şi

$$\text{b) } \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n.$$

134. Să se demonstreze că dacă pentru un anumit şir x_n $(n=1, 2,\ldots)$ sînt satisfăcute cel puţin una din egalităţile

$$\text{a) } \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

sau

$$\text{b) } \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n y_n)=\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n,$$

oricare ar fi şirul y_n $(n=1,2,\ldots)$, şirul x_n este convergent.

135. Să se demonstreze că dacă $x_n>0$ $(n=1,2,\ldots)$ şi

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{x_n}=1,$$

şirul x_n este convergent.

136. Să se demonstreze că dacă şirul x_n $(n=1,2,\ldots)$ este mărginit şi

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0,$$

limitele parţiale ale acestui şir sînt cuprinse între limita inferioară şi limita superioară:

$$l=\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad \text{şi} \quad L=\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n,$$

fiind peste tot dense în acest interval, cu alte cuvinte, orice număr din intervalul $[l, L]$ este limită parţială a şirului dat.

137. Să presupunem că şirul de numere $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ satisface condiţia

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m+x_n \qquad (m, n=1, 2,\ldots).$$

Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ există.

138. Să se demonstreze că dacă şirul x_n $(n=1, 2,\ldots)$ este convergent, şirul mediilor aritmetice

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

este de asemenea convergent şi avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Afirmaţia reciprocă nu este adevărată: să se construiască un exemplu.

139. Să se demonstreze că dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=+\infty.$$

140. Să se demonstreze că dacă şirul x_n $(n=1,2,\ldots)$ este convergent şi $x_n \geq 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}=\lim_{n\to\infty} x_n.$$

141. Să se demonstreze că dacă $x_n > 0$ $(n=1, 2, \ldots)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

în ipoteza că limita din membrul al doilea al ultimei egalităţi există.

142. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

143. Să se demonstreze că dacă

a) $y_{n+1} > y_n$ $(n=1, 2, \ldots)$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$,

c) există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$,

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

144. Să se determine:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lg n}{n}$.

145. Să se demonstreze că dacă p este număr natural, atunci:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}\right) = \dfrac{1}{2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p+3^p+\ldots+(2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$.

146. Să se demonstreze că şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

este convergent.

Este valabilă, aşadar, formula

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

unde $C=0{,}577216\ldots$ este aşa-numita *constantă a lui Euler*, iar $\varepsilon_n \to 0$ pentru $n\to\infty$.

147. Să se determine

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

148. Şirul de numere x_n $(n=1, 2, \ldots)$ este definit de următoarele formule:

$$x_1=a, \quad x_2=b, \quad x_n = \frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2} \qquad (n=3, 4, \ldots).$$

Să se afle

$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

149. Fie $a>0$ şi x_n $(n=1, 2, \ldots)$ un şir de numere definit de următoarea formulă:

$$x_0>0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}.$$

150. Să se demonstreze că şirurile x_n şi y_n $(n=1, 2, \ldots)$, definite de formulele

$$x_1=a, \quad y_1=b, \quad x_{n+1}=\sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2},$$

au limita comună

$$\mu(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(*media aritmetico-geometrică* a numerelor a şi b).

§ 3. Noţiunea de funcţie

[illegible]a de funcţie. Vom spune că variabila y este o func-[illegible]iabila x într-un domeniu de variaţie dat $X=\{x\}$, dacă

fiecărei valori $x \in X$ i se pune în corespondenţă o valoare reală bine determinată $y=f(x)$, aparţinînd unei anumite mulţimi $Y=\{y\}$.

Mulţimea X se numeşte *domeniul de definiţie* sau *domeniul de existenţă* al funcţiei $f(x)$; Y se numeşte *mulţimea valorilor acestei funcţii*. În cazurile cele mai simple, mulţimea X este sau *un interval deschis* (a, b) : $a<x<b$, sau un interval *semideschis* $(a, b]$: $a<x\leq b$ şi $[a, b)$: $a\leq x<b$, sau *un interval închis (segment)* $[a, b]$: $a\leq x\leq b$, unde a şi b sînt numere reale oarecare sau simbolurile $-\infty$ şi $+\infty$.

Dacă fiecărei valori x din X îi corespund mai multe valori $y=f(x)$, atunci y este o *funcţie multiformă* de x.

2°. Funcţia inversă. Dacă înţelegem prin x o valoare oarecare satisfăcînd ecuaţia

$$f(x)=y,$$

y fiind un număr fixat aparţinînd mulţimii de valori Y ale funcţiei $f(x)$, atunci această corespondenţă defineşte pe mulţimea Y o anumită funcţie

$$x=f^{-1}(y),$$

care este în general multiformă şi care se numeşte funcţia *inversă* în raport cu funcţia $f(x)$. Dacă funcţia $y=f(x)$ este monotonă în sensul strict, adică $f(x_2)>f(x_1)$ sau $f(x_2)<f(x_1)$ pentru $x_2>x_1$, funcţia inversă $x=f^{-1}(y)$ este uniformă şi monotonă în acelaşi sens.

Să se determine domeniul de existenţă al următoarelor funcţii:

151. $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

152. $y=\sqrt{3x-x^3}$.

153. $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

154. a) $y=\log(x^2-4)$;

b) $y=\log(x+2)+\log(x-2)$.

155. $y=\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$.

156. $y=\sqrt{\cos x^2}$.

157. $y=\lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

158. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

159. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

160. $y=\arccos(2\sin x)$.

161. $y=\lg[\cos(\lg x)]$.

162. $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2 \pi x}$.

163. $y=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos(2^x)$.

164. $y=\arcsin(1-x)+\lg(\lg x)$.

165. $y=(2x)!$

Să se determine domeniul de existenţă şi mulţimea valorilor pentru următoarele funcţii:

166. $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

167. $y=\lg(1-2\cos x)$.

168. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

169. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

170. $y=(-1)^x$.

171. În triunghiul ABC (fig. 1), avînd baza $\overline{AC}=b$ şi înălţimea $\overline{BD}=h$, este înscris dreptunghiul $KLMN$, a cărui înălţime este $\overline{MN}=x$. Să se exprime perimetrul P al dreptunghiului $KLMN$ şi aria sa S în funcţie de x. Să se construiască graficele funcţiilor $P=P(x)$ şi $S=S(x)$.

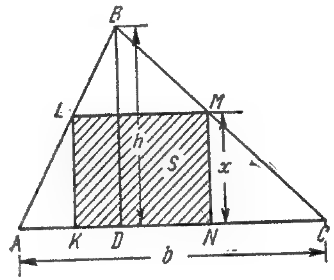

Fig. 1

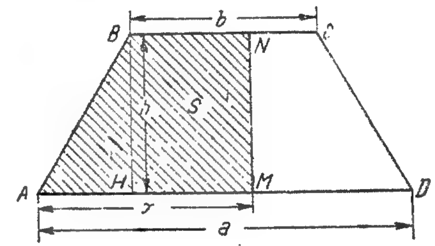

Fig. 2

172. În triunghiul ABC avem latura $\overline{AB}=6$ cm, latura $\overline{AC}=8$ cm şi unghiul $BAC=x$. Să se exprime latura $\overline{BC}=a$ şi aria $\triangle ABC=S$ în funcţie de variabila x. Să se construiască graficele funcţiilor $a=a(x)$ şi $S=S(x)$.

173. În trapezul isoscel $ABCD$ (fig. 2), cu bazele $\overline{AD}=a$ şi $\overline{BC}=b$ $(a>b)$ şi înălţimea $\overline{HB}=h$, se duce dreapta $MN \parallel HB$ la distanţa $AM=x$ de vîrful A. Să se exprime aria S a figurii $ABNMA$ în funcţie de variabila x. Să se construiască graficul funcţiei: $S=S(x)$.

174. O masă egală cu $2g$ este uniform distribuită pe segmentul $0\leq x\leq 1$ al axei Ox, iar în punctele $x=2$ şi $x=3$ ale acestei axe sînt concentrate două mase de cîte un gram. Să se construiască expresiile analitice ale funcţiei $m=m(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, ... se află în intervalul $(-\infty, x)$, şi să ... funcţii.

175. Funcţia $y=\operatorname{sgn} x$ este definită în modul următor:

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & \text{dacă } x<0;\\ 0, & \text{dacă } x=0;\\ 1, & \text{dacă } x>0.\end{cases}$$

Să se construiască graficul acestei funcţii. Să se arate că

$$|x|=x \operatorname{sgn} x.$$

176. Funcţia $y=[x]$ (*partea întreagă* a numărului x) se defineşte astfel: dacă $x=n+r$, n fiind un număr întreg şi $0\leq r<1$, atunci $[x]=n$.

Să se construiască graficul acestei funcţii.

177. Să presupunem că

$$y=\pi(x) \qquad (x\geq 0)$$

reprezintă numărul numerelor prime care nu depăşesc pe x. Să se construiască graficul acestei funcţii pentru valorile variabilei $0\leq x\leq 20$.

Care este imaginea E_y a mulţimii E_x dacă funcţia $y=f(x)$ este:

178. $y=x^2$,	$E_x=\{1\leq x\leq 2\}$.
179. $y=\lg x$,	$E_x=\{10<x<1\,000\}$.
180. $y=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg} x$,	$E_x=\{-\infty<x<+\infty\}$.
181. $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}$,	$E_x=\{0<\vert x\vert\leq 1\}$.
182. $y=\vert x\vert$,	$E_x=\{1\leq\vert x\vert\leq 2\}$.

Să presupunem că variabila x ia toate valorile din intervalul $0<x<1$. Ce mulţime de valori va lua variabila y, dacă:

183. $y=a+(b-a)x$.	**186.** $y=\sqrt{x-x^2}$.
184. $y=\frac{1}{1-x}$.	**187.** $y=\operatorname{ctg}\pi x$.
185. $y=\frac{x}{2x-1}$.	**188.** $y=x+[2x]$.

189. Să se calculeze $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, dacă

$$f(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x.$$

190. Să se afle $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$, dacă

$$f(x)=\lg x^2.$$

191. Să se calculeze $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$, $f(0{,}999)$, $f(1)$, dacă

$$f(x)=1+[x].$$

192. Să se calculeze $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, dacă

$$f(x)=\begin{cases}1+x & \text{pentru } -\infty<x\leq 0,\\ 2^x & \text{pentru } 0<x<+\infty.\end{cases}$$

193. Să se calculeze $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, dacă

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

194. Să se determine valorile lui x pentru care: 1) $f(x)=0$ 2) $f(x)>0$; 3) $f(x)<0$, dacă:

a) $f(x)=x-x^3$; b) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$; c) $f(x)=(x+|x|)(1-x)$.

195. Să se determine

$$\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

dacă: a) $f(x)=ax+b$; b) $f(x)=x^2$; c) $f(x)=a^x$.

196. Fie

$$f(x)=ax^2+bx+c.$$

Să se arate că

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0.$$

197. Să se determine funcţia liniară întreagă

$$f(x)=ax+b,$$

dacă $f(0)=-2$, $f(3)=5$.

Care sînt valorile lui $f(1)$ şi $f(2)$ (*interpolare liniară*)?

198. Să se afle funcţia raţională întreagă de gradul al doilea:

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

dacă

$$f(-2)=0,\quad f(0)=1,\quad f(1)=5.$$

Să se determine valorile lui $f(-1)$ şi $f(0{,}5)$ (*interpolare pătratică*).

199. Să se determine funcţia raţională întreagă de gradul al treilea:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

dacă

$$f(-1)=0,\quad f(0)=2,\quad f(1)=-3,\quad f(2)=5.$$

200. Să se determine funcţia de forma

$$f(x)=a+bc^x,$$

dacă

$$f(0)=15,\quad f(2)=30,\quad f(4)=90.$$

201. Să se demonstreze că dacă pentru funcţia liniară

$$f(x)=ax+b$$

valorile argumentului $x=x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ sînt în progresie aritmetică, valorile corespunzătoare ale funcţiei $y_n=f(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ sînt şi ele în progresie aritmetică.

202. Să se demonstreze că dacă pentru funcţia exponenţială

$$f(x)=a^x \qquad (a>0)$$

valorile argumentului $x=x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ sînt în progresie aritmetică, valorile corespunzătoare ale funcţiei $y_n=f(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ sînt în progresie geometrică.

203. Fie $f(u)$ o funcţie definită pentru $0<u<1$. Să se determine domeniul de definiţie al funcţiilor:

a) $f(\sin x)$; b) $f(\ln x)$; c) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

204. Fie

$$f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x}) \qquad (a>0).$$

Să se arate că

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\,f(y).$$

205. Fie

$$f(x)+f(y)=f(z).$$

Să se determine z, dacă:

a) $f(x)=ax$; c) $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $(|x|<1)$;

b) $f(x)=\frac{1}{x}$; d) $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$.

Să se determine $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ şi $\psi[\varphi(x)]$, dacă

206. $\varphi(x)=x^2$ şi $\psi(x)=2^x$.

207. $\varphi(x)=\operatorname{sgn} x$ şi $\psi(x)=\frac{1}{x}$.

208. $\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{pentru } x\le 0,\\ x & \text{pentru } x>0\end{cases}$ şi $\psi(x)=\begin{cases}0 & \text{pentru } x\le 0\\ -x^2 & \text{pentru } x>0.\end{cases}$

209. Să se determine $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$, dacă

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

210. Fie

$$f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n\text{ ori}}.$$

Să se calculeze $f_n(x)$, dacă

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

211. Să se determine $f(x)$, dacă

$$f(x+1)=x^2-3x+2.$$

212. Să se determine funcţia $f(x)$, dacă

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}.$$

213. Să se determine $f(x)$ dacă

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2} \qquad (x>0).$$

Să se demonstreze că următoarele funcţii sînt monoton crescătoare în intervalele indicate:

214. $f(x)=x^2$ $\quad(0\le x<+\infty)$.

215. $f(x)=\sin x$ $\quad\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

216. $f(x)=\operatorname{tg} x$ $\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

217. $f(x)=2x+\sin x \qquad (-\infty<x<+\infty).$

Să se demonstreze că următoarele funcții sînt monoton descrescătoare în intervalele indicate:

218. $f(x)=x^2\ (-\infty<x\leq 0).$ **219.** $f(x)=\cos x\ (0\leq x\leq \pi).$

220. $f(x)=\operatorname{ctg} x \qquad (0<x<\pi).$

221. Să se studieze monotonia următoarelor funcții:

a) $f(x)=ax+b;$ d) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d};$

b) $f(x)=ax^2+bx+c;$

c) $f(x)=x^3;$ e) $f(x)=a^x \qquad (a>0).$

222. Se poate logaritma membru cu membru o inegalitate?

223. Fie $\varphi(x)$, $\psi(x)$ și $f(x)$ funcții monoton crescătoare. Să se demonstreze că dacă

$$\varphi(x)\leq f(x)\leq \psi(x),$$

atunci

$$\varphi[\varphi(x)]\leq f[f(x)]\leq \psi[\psi(x)].$$

Să se determine funcția inversă $x=\varphi(y)$ și domeniul ei de existență, dacă:

224. $y=2x+3 \qquad (-\infty<x<+\infty).$

225. $y=x^2;$ a) $-\infty<x\leq 0;$ b) $0\leq x<+\infty.$

226. $y=\dfrac{1-x}{1+x} \qquad (x\neq -1).$

227. $y=\sqrt{1-x^2};$ a) $-1\leq x\leq 0;$ b) $0\leq x\leq 1.$

228. $y=\operatorname{sh} x,$ unde $\operatorname{sh} x=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})\ (-\infty<x<+\infty).$

229. $y=\operatorname{th} x,$ unde $\operatorname{th} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad (-\infty<x<+\infty).$

230.

$$y=\begin{cases} x, & \text{dacă } -\infty<x<1;\\ x^2, & \text{dacă } 1\leq x\leq 4;\\ 2^x, & \text{dacă } 4<x<+\infty.\end{cases}$$

231. Vom spune că funcția $f(x)$, definită în intervalul simetric $(-l,\ l)$, este *pară* dacă

$$f(-x)=f(x)$$

și *impară* dacă

$$f(-x)=-f(x).$$

Să se determine care din funcțiile $f(x)$ date mai jos sînt pare și care sînt impare:

a) $f(x)=3x-x^3;$ d) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x};$

b) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2};$ e) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$

c) $f(x)=a^x+a^{-x}\ (a>0).$

232. Să se demonstreze că orice funcție $f(x)$, definită în intervalul simetric $(-l,\ l)$, poate fi pusă sub forma unei sume dintr-o funcție pară și una impară.

233. Vom spune că funcția $f(x)$ este *periodică* dacă există un număr $T>0$ (*perioada funcției* în sens larg!), astfel încît pentru toate valorile variabilei x pentru care este definită $f(x)$, să fie satisfăcută egalitatea

$$f(x+nT)=f(x) \qquad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots).$$

Să se arate care din funcțiile date sînt periodice și să se determine cea mai mică perioadă a lor, dacă:

a) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x;$

b) $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x;$

c) $f(x)=2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3};$ f) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x};$

d) $f(x)=\sin^2 x;$ g) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x};$

e) $f(x)=\sin x^2;$ h) $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2}).$

234. Să se demonstreze că pentru funcția lui Dirichlet

$$\chi(x)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional,}\\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional,}\end{cases}$$

orice număr rațional este o perioadă a ei.

235. Să se demonstreze că suma și produsul a două funcții periodice definite pe aceeași mulțime, avînd perioadele comensurabile, sînt de asemenea funcții periodice.

236. Să se demonstreze că dacă pentru funcţia $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ este satisfăcută egalitatea $f(x+T)=kf(x)$, k şi T fiind constante pozitive, atunci $f(x)=a^x\varphi(x)$, unde a este o constantă, iar $\varphi(x)$ este o funcţie periodică, cu perioada T.

§ 4. Reprezentarea grafică a unei funcţii

1°. Construcţia graficului funcţiei $y=f(x)$ se face în modul următor: 1) se determină domeniul de existenţă al funcţiei, $X=\{x\}$; 2) se alege o reţea suficient de deasă de valori ale variabilei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din X şi se construieşte tabela valorilor corespunzătoare pentru funcţia

$$y_i=f(x_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, n);$$

3) se trasează în planul Oxy sistemul de puncte $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ şi se unesc aceste puncte printr-o linie a cărei alură depinde de poziţia punctelor intermediare.

2°. Pentru a obţine corect graficul unei funcţii trebuie studiate proprietăţile generale ale acestei funcţii.

In primul rînd, trebuie: 1) să determinăm prin valoarea ecuaţiei $f(x)=0$ punctele de intersecţie ale graficului funcţiei cu axa Ox (*zerourile funcţiei*); 2) să stabilim domeniul de variaţie al argumentului pentru care funcţia este pozitivă sau negativă; 3) să stabilim, dacă este posibil, *porţiunile de monotonie* (de creştere sau de descreştere) ale funcţiei; 4) să studiem comportarea funcţiei atunci cînd argumentul se apropie oricît de mult de punctele frontieră ale domeniului de existenţă a funcţiei.

In acest paragraf se presupune că proprietăţile funcţiilor elementare cele mai simple — funcţia putere, funcţia exponenţială, funcţiile trigonometrice etc. — sînt cunoscute cititorului.

Folosind aceste proprietăţi se pot schiţa graficele multor funcţii, fără a face multe calcule. Anumite grafice pot fi reduse uneori la combinaţii (suma sau produsul etc.) ale acestor grafice simple.

237. Să se construiască graficul funcţiei liniare omogene

$$y=ax$$

pentru $a=0$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; -1.

238. Să se construiască graficul funcţiei liniare

$$y=x+b$$

pentru $b=0$, 1, 2, -1.

239. Să se construiască graficele funcţiilor liniare:

a) $y=2x+3$; b) $y=2-0,1x$; c) $y=-\frac{x}{2}-1$.

240. Coeficientul de dilatare liniară al fierului este $\alpha=1,2\cdot10^{-6}$. Să se construiască, alegînd o unitate de măsură convenabilă, graficul funcţiei

$$l=f(T) \qquad (-40°\leq T\leq 100°),$$

T fiind temperatura în grade şi l lungimea barei de fier la temperatura T, dacă $l=100$ cm pentru $T=0°$.

241. Pe axa reală se mişcă două puncte materiale. Primul punct material se afla la momentul iniţial $t=0$ la 20 m la stînga originii şi avea viteza $v_1=10$ m/s; al doilea punct se afla la momentul $t=0$ la 30 m la dreapta punctului 0 şi avea viteza $v_2=20$ m/s. Să se construiască graficele ecuaţiilor de mişcare ale acestor puncte şi să se determine momentul şi locul întîlnirii lor.

242. Să se construiască graficele funcţiilor raţionale întregi de gradul al doilea (*parabole*):

a) $y=ax^2$ pentru $a=1$, $\frac{1}{2}$, 2, -1;

b) $y=(x-x_0)^2$ pentru $x_0=0$, 1, 2, -1;

c) $y=x^2+c$ pentru $c=0$, 1, 2, -1.

243. Să se construiască graficul *trinomului de gradul al doilea*

$$y=ax^2+bx+c,$$

aducîndu-l la forma

$$y=y_0+a(x-x_0)^2.$$

Să se considere următoarele exemple:

a) $y=8x-2x^2$; c) $y=-x^2+2x-1$;

b) $y=x^2-3x+2$; d) $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$.

244. Un punct material este aruncat sub un unghi $\alpha=45°$ faţă de planul orizontal cu viteza iniţială $v_0=600$ m/s. Să se construiască graficul traiectoriei mişcării şi să se determine vîrful traiectoriei precum şi distanţa pînă la locul în care punctul material atinge din nou pămîntul (se consideră aproximativ $g\approx10$ m/s²; rezistenţa aerului se neglijează).

Să se construiască graficele funcţiilor raţionale întregi de grad mai mare decît al doilea:

245. $y=x^3+1$. **247.** $y=x^2-x^4$.

246. $y=(1-x^2)(2+x)$. **248.** $y=x(a-x)^2(a+x)^3\ (a>0)$.

Să se construiască graficele funcţiilor omografice (*hiperbole*):

249. $y=\frac{1}{x}$. **250.** $y=\frac{1-x}{1+x}$.

251. Să se construiască graficul funcţiei omografice

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0,\ c\neq 0),$$

aducînd-o la forma

$$y=y_0+\frac{m}{x-x_0}.$$

Să se considere exemplul

$$y=\frac{3x+2}{2x-3}.$$

252. Un gaz ocupă la presiunea $p_0=1$ Atm un volum $V_0=12\ m^3$. Să se construiască graficul variaţiei volumului V al gazului în funcţie de presiunea p, în ipoteza că temperatura gazului rămîne constantă (*legea lui Boyle-Mariotte*).

Să se construiască graficele următoarelor funcţii raţionale:

253. $y=x+\frac{1}{x}$ (hiperbolă).

254. $y=x^2+\frac{1}{x}$ (tridentul lui Newton).

255. $y=x+\frac{1}{x^2}$. **256.** $y=\frac{1}{1+x^2}$ (bucla Mariei Agnesi)

257. $y=\frac{1}{1+x^2}$ (serpentina lui Newton).

258. $y=\frac{1}{1-x^2}$. **259.** $y=\frac{x}{1-x^2}$.

260. $y=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}$. **262.** $y=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

261. $y=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{1-x}$.

263. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\qquad (a_1\neq 0),$$

aducînd-o la forma

$$y=kx+m+\frac{n}{x-x_0}.$$

Să se considere exemplul

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}.$$

264. Să se construiască graficul valorii absolute a forţei de atracţie F pentru un punct material care se află la distanţa x de centrul de atracţie, ştiind că $F=10$ kg pentru $x=1$ m (*legea lui Newton*).

265. Atunci cînd temperatura se menţine constantă, volumul V al unui gaz real şi presiunea sa p sînt legate, conform legii lui *Van-der-Waals*, prin relaţia

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=c.$$

Să se construiască graficul funcţiei $p=p(V)$ pentru $a=2$, $b=0{,}1$ şi $c=10$.

Să se construiască graficele următoarelor funcţii iraţionale:

266. $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (parabolă).

267. $y=\pm x\sqrt{x}$ (parabola lui Neil).

268. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (elipsă).

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (hiperbolă).

270. $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **271.** $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

272. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (cisoidă).

273. $y = \pm \sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

274. Să se construiască graficul funcţiei putere

$$y=x^n$$

pentru: a) $n=1, 3, 5$; b) $n=2, 4, 6$.

275. Să se construiască graficul funcţiei putere

$$y=x^n$$

pentru: a) $n=-1, -3$; b) $n=-2, -4$.

276. Să se construiască graficul rădăcinii

$$y=\sqrt[m]{x}$$

pentru: a) $m=2, 4$; b) $m=3, 5$.

277. Să se construiască graficul rădăcinii

$$y=\sqrt[m]{x^k}$$

pentru: a) $m=2, k=1$; b) $m=2, k=3$; c) $m=3, k=1$; d) $m=3, k=2$; e) $m=3, k=4$; f) $m=4, k=2$; g) $m=4, k=3$;

278. Să se construiască graficul funcţiei exponenţiale

$$y=a^x$$

pentru $a=\frac{1}{2}$, 1, 2, e, 10.

279. Să se construiască graficul funcţiei exponenţiale compuse

$$y=e^{y_1},$$

unde:

a) $y_1=x^2$; c) $y_1=\frac{1}{x}$; e) $y_1=-\frac{1}{x^2}$;

b) $y_1=-x^2$; d) $y_1=\frac{1}{x^2}$; f) $y_1=\frac{2x}{1-x^2}$.

280. Să se construiască graficul funcţiei logaritmice

$$y=\log_a x$$

pentru $a=\frac{1}{2}$, 2, e, 10.

281. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=\ln(-x)$; b) $y=-\ln x$.

282. Să se construiască graficul funcţiei logaritmice compuse

$$y=\ln y_1,$$

unde:

a) $y_1=1+x^2$; b) $y_1=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

c) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$; d) $y_1=\frac{1}{x^2}$; e) $y_1=1+e^x$.

283. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=\log_x 2.$$

284. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=A\sin x$$

pentru $A=1, 10, -2$.

285. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=\sin(x-x_0),$$

dacă $x_0=0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$.

286. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=\sin nx,$$

dacă $n=1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

287. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=a\cos x+b\sin x,$$

aducînd-o la forma

$$y=A\sin(x-x_0).$$

Să se considere exemplul: $y=6\cos x+8\sin x$.

Să se construiască graficele funcţiilor trigonometrice:

288. $y=\cos x$.
289. $y=\operatorname{tg} x$.
290. $y=\operatorname{ctg} x$.
291. $y=\sec x$.
292. $y=\operatorname{cosec} x$.
293. $y=\sin^2 x$.

294. $y=\sin^3 x$.
295. $y=\operatorname{ctg}^2 x$.
296. $y=\sin x\cdot\sin 3x$.
297. $y=\pm\sqrt{\cos x}$.

Să se construiască graficele funcţiilor:

298. $y=\sin x^2$.
299. $y=\sin\frac{1}{x}$.
300. $y=x\cos\frac{\pi}{x}$.
301. $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$.
302. $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$.
303. $y=\pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$.
304. $y=\frac{\sin x}{x}$.
305. $y=e^x\cos x$.
306. $y=\pm 2^{-x}\sqrt{\sin \pi x}$.
307. $y=\frac{\cos x}{1+x^2}$.
308. $y=\ln(\cos x)$.
309. $y=\cos(\ln x)$.
310. $y=e^{\frac{1}{\sin x}}$.

Să se construiască graficele funcţiilor circulare inverse:

311. $y=\arcsin x$.
312. $y=\arccos x$.
313. $y=\operatorname{arctg} x$.
314. $y=\operatorname{arctg} x$.
315. $y=\arcsin\frac{1}{x}$.
316. $y=\arccos\frac{1}{x}$.
317. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.
318. $y=\arcsin(\sin x)$.
319. $y=\arcsin(\cos x)$.
320. $y=\arccos(\cos x)$.
321. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.
322. $y=\arcsin(2\sin x)$.

323. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=\arcsin y_1,$$

unde

a) $y_1=1-\frac{x}{2}$; c) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$;

b) $y_1=\frac{2x}{1+x^2}$; d) $y_1=e^x$.

324. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=\operatorname{arctg} y_1,$$

unde:

a) $y_1=x^2$; b) $y_1=\frac{1}{x^2}$; c) $y_1=\ln x$; d) $y_1=\frac{1}{\sin x}$.

325. Cunoscînd graficul funcţiei $y=f(x)$, să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=-f(x)$; b) $y=f(-x)$; c) $y=-f(-x)$.

326. Cunoscînd graficul funcţiei $x=f(x)$, să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=f(x-x_0)$; c) $y=f(2x)$;
b) $y=y_0+f(x-x_0)$; d) $y=f(kx+b)$ $(k\neq 0)$.

327. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=2+\sqrt{1-x}$;
b) $y=1-e^{-x}$;
c) $y=\ln(1+x)$;
d) $y=\frac{\pi}{2}\arcsin(1+x)$;
e) $y=3+2\cos 3x$.

328. Cunoscînd graficul funcţiei $y=f(x)$, să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=|f(x)|$; b) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$;

c) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$.

329. Cunoscînd graficul funcţiei $y=f(x)$, să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=f^2(x)$;
b) $y=\sqrt{f(x)}$;
c) $y=\ln f(x)$;
d) $y=f(f(x))$;
e) $y=\operatorname{sgn} f(x)$;
f) $y=[f(x)]$.

330. Cunoscînd graficele funcţiilor $y=f(x)$ şi $y=g(x)$, să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=f(x)+g(x)$; b) $y=f(x)g(x)$; c) $y=f(g(x))$.

Aplicînd regula de adunare a graficelor, să se construiască graficele următoarelor funcţii:

331. $y=1+x+e^x$.
332. $y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}$.
333. $y=x+\sin x$.
334. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

335. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$.

336. $y=\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x.$

337. $y=\sin^4 x+\cos^4 x.$

338. $y=|1-x|+|1+x|.$

339. $y=|1-x|-|1+x|.$

340. Să se construiască graficele funcţiilor hiperbolice:

a) $y=\operatorname{ch} x$, unde $\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

b) $y=\operatorname{sh} x$, unde $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

c) $y=\operatorname{th} x$, unde $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Aplicînd regula de înmulţire a graficelor, să se construiască graficele funcţiilor:

341. $y=x\sin x.$

342. $y=x\cos x.$

343. $y=x^2\sin^2 x.$

344. $y=\frac{\sin x}{1+x^2}.$

345. $y=e^{-x^2}\cos 2x.$

346. $y=x\operatorname{sgn}(\sin x).$

347. $y=[x]\,|\sin \pi x|.$

348. $y=\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x).$

349. Fie

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & \text{dacă } |x|\leqq 1;\\ 0, & \text{dacă } |x|>1.\end{cases}$$

Să se construiască graficul funcţiei

$$y=f(x)\,f(a-x),$$

dacă:

a) $a=0$; b) $a=1$; c) $a=2$.

350. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin \pi x).$$

Să se construiască graficul funcţiei

$$y=\frac{1}{f(x)},$$

dacă:

351. $f(x)=x^2(1-x^2).$

352. $f(x)=x(1-x)^2.$

353. $f(x)=\sin^2 x.$

354. $f(x)=\ln x.$

355. $f(x)=e^x\sin x.$

356. Să se construiască graficul funcţiei compuse

$$y=f(u),$$

unde $u=2\sin x$, dacă:

$$f(u)=\begin{cases}-1 & \text{pentru } -\infty<u<-1;\\ u & \text{pentru } -1\leqq u\leqq 1;\\ 1 & \text{pentru } 1<u<+\infty.\end{cases}$$

357. Fie

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|) \quad \text{şi} \quad \psi((x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } x<0;\\ x^2, & \text{dacă } x\geqq 0.\end{cases}$$

Să se construiască graficele funcţiilor

a) $y=\varphi[\varphi(x)]$; c) $y=\psi[\varphi(x)]$;

b) $y=\varphi[\psi(x)]$; d) $y=\psi[\psi(x)]$.

358. Fie

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } |x|\leqq 1;\\ 0, & \text{dacă } |x|>1\end{cases}$$

şi

$$\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & \text{dacă } |x|\leqq 2;\\ 2, & \text{dacă } |x|>2.\end{cases}$$

Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=\varphi[\varphi(x)]$; c) $y=\psi[\varphi(x)]$;

b) $y=\varphi[\psi(x)]$; d) $y=\psi[\psi(x)]$.

359. Să se prelungească funcţia $f(x)$, definită în domeniul pozitiv $x>0$, în domeniul negativ $x<0$ astfel încît funcţia obţinută să fie: 1) pară; 2) impară, dacă:

a) $f(x)=1-x$; d) $f(x)=\sin x$;

b) $f(x)=2x-x^2$ e) $f(x)=e^x$;

c) $f(x)=\sqrt{x}$; f) $f(x)=\ln x$.

Să se construiască graficele corespunzătoare.

360. Să se determine axele verticale de simetrie ale graficelor funcţiilor:

a) $y=ax^2+bx+c$; c) $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$ $(0<a<b)$,

b) $y=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}$; d) $y=a+b\cos x$.

361. Să se determine centrele de simetrie ale graficelor funcţiilor:

a) $y=ax+b$; d) $y=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$;

b) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$; e) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.

c) $y=ax^3+bx^2+cx+d$;

362. Să se construiască graficele funcţiilor periodice:

a) $y=|\sin x|$; b) $y=\operatorname{sgn}\cos x$;

c) $y=f(x)$,

unde $f(x)=A\frac{x}{l}\left(2-\frac{x}{l}\right)$, dacă $0\leqq x\leqq 2l$ şi $f(x+2l)\equiv f(x)$;

d) $y=|x|-2\left[\frac{x}{2}\right]$;

e) $y=(x)$, unde (x) este distanţa de la numărul x pînă la numărul întreg cel mai apropiat.

363. Să se demonstreze că dacă graficul funcţiei $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ este simetric în raport cu două axe verticale $x=a$ şi $x=b\,(b>a)$, atunci funcţia $f(x)$ este periodică.

364. Să se demonstreze că dacă graficul funcţiei $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ este simetric în raport cu două puncte $A(a, y_0)$ şi $B(b, y_1)\,(b>a)$, funcţia $f(x)$ este suma unei funcţii liniare cu o funcţie periodică. In particular, dacă $y_0=y_1$, funcţia $f(x)$ este periodică.

365. Să se demonstreze că dacă graficul funcţiei $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ este simetric în raport cu punctul $A(a, y_0)$ şi dreapta $x=b\,(b\neq a)$, funcţia $f(x)$ este periodică.

366. Să se construiască graficul funcţiei $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, dacă $f(x+1)=2f(x)$ şi $f(x)=x(1-x)$ pentru $0\leqq x\leqq 1$.

367. Să se construiască graficul funcţiei

$$y=f(x)\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

dacă

$$f(x+\pi)=f(x)+\sin x\quad\text{şi}\quad f(x)=0,\quad\text{pentru}\quad 0\leqq x\leqq\pi.$$

368. Să se construiască graficul funcţiei $y=y(x)$, dacă:

a) $x=y-y^3$; c) $x=y-\ln y$;

b) $x=\frac{1-y}{1+y^2}$; d) $x^2=\sin y$.

369. Să se construiască graficele funcţiilor $y=y(x)$, date sub formă parametrică:

a) $x=1-t$, $y=1-t^2$;

b) $x=t+\frac{1}{t}$, $y=t+\frac{1}{t^2}$;

c) $x=10\cos t$, $y=\sin t$ (elipsă);

d) $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$ (hiperbolă);

e) $x=5\cos^2 t$, $y=3\sin^2 t$;

f) $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ (cicloidă);

g) $x=\sqrt[t+1]{t}$, $y=\sqrt[t]{t+1}$, $(t>0)$.

370. Să se construiască graficele funcţiilor implicite:

a) $x^2-xy+y^2=1$ (elipsă);

b) $x^3+y^3-3xy=0$ (foliul lui Descartes);

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ (parabolă);

d) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ (astroidă);

e) $\sin x=\sin y$;

f) $\cos(\pi x^2)=\cos(\pi y)$;

g) $x^y=y^x\,(x>0,\ y>0)$;

h) $x-|x|=y-|y|$.

371. Să se construiască graficele funcţiilor $r=r(\varphi)$ în sistemul de coordonate polare (r, φ), dacă:

a) $r=\varphi$ (spirala lui Arhimede);

b) $r=\frac{\pi}{\varphi}$ (spirala hiperbolică);

c) $r=\frac{\varphi}{\varphi+1}$ $(0\leq\varphi<+\infty)$;

d) $r=2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (spirala logaritmică);

e) $r=2(1+\cos\varphi)$ (cardioidă);

f) $r=10\sin 3\varphi$ (roza cu trei foi);

g) $r^2=36\cos 2\varphi$, (lemniscata lui Bernoulli);

h) $\varphi=\frac{r}{r-1}$ $(r>1)$;

i) $\varphi=2\pi\sin r$.

372. Să se rezolve aproximativ ecuaţia

$$x^3-3x+1=0,$$

construind graficul funcţiei $y=x^3-3x+1$.

Să se rezolve grafic următoarele ecuaţii:

373. $x^3-4x-1=0$. **376.** $\lg x=0,1x$.

374. $x^4-4x+1=0$. **377.** $10^x=x^2$.

375. $x=2^{-x}$. **378.** $\operatorname{tg} x=x$ $(0\leq x\leq 2\pi)$.

Să se rezolve grafic următoarele sisteme de ecuaţii:

379. $x+y^2=1,\quad 16x^2+y=4$.

380. $x^2+y^2=100,\quad y=10(x^2-x-2)$.

§ 5. Limita unei funcţii

1°. Proprietatea unei funcţii de a fi mărginită. Vom spune că funcţia $f(x)$ este mărginită în intervalul dat (a, b), dacă există două numere m şi M astfel încît

$$m<f(x)<M$$

pentru $x\in(a, b)$.

Numărul $m_0=\inf\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ se numeşte *marginea inferioară* a funcţiei $f(x)$, iar numărul $M_0=\sup\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$ se numeşte *marginea superioară* a funcţiei $f(x)$ în intervalul dat (a, b). Diferenţa M_0-m_0 se numeşte *oscilaţia funcţiei* în intervalul (a, b).

2°. Limita unei funcţii într-un punct. Prin expresia

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \tag{1}$$

se înţelege că, pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, astfel încît oricare ar fi x pentru care $f(x)$ este definită şi care satisface condiţia $0<|x-a|<\delta$, este satisfăcută inegalitatea

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Pentru ca funcţia (1) să aibă o limită este necesar şi suficient ca pentru orice şir $x_n\to a$ $(n=1, 2, \ldots)$ să fie satisfăcută egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

Există următoarele două relaţii remarcabile:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad 2)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Criteriul lui Cauchy. Limita funcţiei $f(x)$ în punctul a există dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, astfel încît

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

de îndată ce $0<|x'-a|<\delta$ şi $0<|x''-a|<\delta$, unde x' şi x'' aparţin domeniului de definiţie al funcţiei $f(x)$.

3°. Limită la dreapta şi limită la stînga. Vom spune că numărul A' este *limită la stînga* a funcţiei $f(x)$ în punctul a:

$$A'=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a-0),$$

dacă

$$|A'-f(x)|<\varepsilon \quad \text{pentru} \quad 0<a-x<\delta(\varepsilon).$$

In mod analog vom spune că numărul A'' este *limită la dreapta* în punctul a pentru funcţia $f(x)$:

$$A''=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a+0),$$

dacă

$$|A''-f(x)|<\varepsilon \quad \text{pentru} \quad 0<x-a<\delta(\varepsilon).$$

Pentru ca funcţia $f(x)$ să aibă o limită în punctul a este necesar şi suficient ca

$$f(a-0)=f(a+0).$$

4°. Limită infinită. Scrierea convenţională

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

înseamnă că pentru orice $E>0$ este valabilă inegalitatea

$$|f(x)|>E, \quad \text{de îndată ce} \quad 0<|x-a|<\delta(E).$$

5°. L i m i t ă p a r ţ i a l ă. Dacă pentru un anumit şir $x_n \to a$ are loc egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=B,$$

atunci numărul (sau simbolul ∞) B se numeşte *limita parţială* (respectiv finită sau infinită) a *funcţiei* $f(x)$ în punctul a.

Cea mai mică şi cea mai mare din aceste limite parţiale se notează cu

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) \quad \text{şi} \quad \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$$

şi se numesc respectiv *limita inferioară* şi *limita superioară* a funcţiei $f(x)$ în punctul a.

Egalitatea

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x)=\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$$

este necesară şi suficientă pentru ca funcţia $f(x)$ să aibă o limită (finită sau infinită) în punctul a.

381. Să se arate că funcţia definită prin condiţiile

$$f(x)=n, \quad \text{pentru} \quad x=\frac{m}{n},$$

unde m şi n sînt numere întregi prime între ele şi $n>0$, şi

$$f(x)=0, \quad \text{dacă } x \text{ este iraţional,}$$

este finită dar nu este mărginită în fiecare punct x (nu este mărginită în orice vecinătate a acestui punct).

382. Dacă funcţia $f(x)$ este definită şi mărginită în fiecare punct: a) al unui interval, b) al unui segment, este oare această funcţie mărginită în intervalul dat, respectiv pe segmentul dat?

Să se dea exemple corespunzătoare.

383. Să se arate că funcţia

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

este mărginită în intervalul $-\infty<x<+\infty$.

384. Să se arate că funcţia

$$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

nu este mărginită în orice vecinătate a punctului $x=0$, totuşi nu devine infinită atunci cînd $x\to 0$.

385. Să se cerceteze dacă funcţia

$$f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$$

este mărginită în intervalul $0<x<\varepsilon$.

386. Să se arate că funcţia

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

are în domeniul $0\leq x<+\infty$ marginea inferioară $m=0$ şi marginea superioară $M=1$.

387. Fie funcţia $f(x)$ definită şi monoton crescătoare pe segmentul $[a, b]$. Să se afle marginea inferioară şi marginea superioară a acestei funcţii pe acest segment $[a, b]$.

Să se determine marginea inferioară şi marginea superioară a funcţiilor:

388. $f(x)=x^2$ în $(-2, 5)$. 0, 25

389. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ în $(-\infty, +\infty)$. 0, 1

390. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ în $(0, +\infty)$,

391. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ în $(0. +\infty)$. 2, ∞

392. $f(x)=\sin x$ în $(0, +\infty)$. -1 ; +1

393. $f(x)=\sin x+\cos x$ în $[0, 2\pi]$.

394. $f(x)=2^x$ în $(-1, 2)$.

395. $f(x)=[x]$: a) în $(0, 2)$ şi b) în $[0, 2]$.

396. $f(x)=x-[x]$ în $[0, 1]$.

397. Să se determine oscilaţia funcţiei

$$f(x)=x^2$$

în intervalele: a) $(1;3)$; b)$(1{,}9; 2{,}1)$; c) $1{,}99; 2{,}01)$; d) $(1{,}999; 2{,}001)$.

398. Să se determine oscilaţia funcţiei $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}$

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

în intervalele: a) $(-1;\ 1)$; b) $(-0{,}1;\ 0{,}1)$ c) $(-0{,}01;\ 0{,}01)$; d) $(-0{,}001;\ 0{,}001)$.

399. Fie $m[f]$ şi $M[f]$ marginea inferioară respectiv marginea superioară a funcţiei $f(x)$ în intervalul $(a,\ b)$.

Să se demonstreze că dacă $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ sînt funcţii definite în $(a,\ b)$, atunci

$$m[f_1+f_2]\geq m[f_1]+m[f_2]$$

şi

$$M[f_1+f_2]\leq M[f_1]+M[f_2].$$

Să se construiască exemple de funcţii $f_1(x)$ şi $f_2(x)$ pentru care să avem în ultimele relaţii: a) egalitate şi b) inegalitate strictă.

400. Fie $f(x)$ funcţia definită în domeniul $[a,\ +\infty)$ şi mărginită pe orice segment $[a,\ b]$.

Punem

$$m(x)=\inf_{a\leq\xi\leq x} f(\xi)$$

şi

$$M(x)=\sup_{a\leq\xi\leq x} f(x).$$

Să se construiască graficele funcţiilor $y=m(x)$ şi $y=M(x)$, dacă:

a) $f(x)=\sin x$ şi b) $f(x)=\cos x$.

401. Să se demonstreze, folosind limbajul „$\varepsilon-\delta$", că,

$$\lim_{x\to 2} x^2=4.$$

Să se completeze următoarea tabelă:

ε	0,1	0,01	0,001	0,000 1	...
δ					

402. Să se demonstreze folosind limbajul „$E-\delta$", că

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}=+\infty.$$

Să se completeze următoarea tabelă:

E	10	100	1 000	10 000	...
δ					

403. Să se formuleze cu ajutorul inegalităţilor următoarele afirmaţii:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$; b) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b$; c) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$.

Să se dea exemple corespunzătoare.

Să se formuleze cu ajutorul inegalităţilor următoarele afirmaţii şi să se dea exemple corespunzătoare:

404. a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

405 a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to a}(x)=-\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$;

e) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=-\infty$;

f) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$;

g) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$;

h) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=-\infty$;

i) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$.

406 a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

407. Fie $y=f(x)$. Să se formuleze cu ajutorul inegalităţilor semnificaţia celor scrise mai jos:

a) $y \to b-0$ pentru $x \to a$;

b) $y \to b-0$ pentru $x \to a-0$;

c) $y \to b-0$ pentru $x \to a+0$;

d) $y \to b+0$ pentru $x \to a$;

e) $y \to b+0$ pentru $x \to a-0$;

f) $y \to b+0$ pentru $x \to a+0$;

g) $y \to b-0$ pentru $x \to \infty$;

h) $y \to b-0$ pentru $x \to -\infty$;

i) $y \to b-0$ pentru $x \to +\infty$;

j) $y \to b+0$ pentru $x \to \infty$;

k) $y \to b+0$ pentru $x \to -\infty$;

l) $y \to b+0$ pentru $x \to +\infty$.

Să se dea exemple corespunzătoare.

408. Fie

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

$a_i\,(i=0, 1, \ldots, n)$ fiind numere reale.

Să se demonstreze că

$$\lim_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty.$$

409. Fie

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m},$$

unde $a_0\neq 0$ şi $b_0\neq 0$.

Să se demonstreze că

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & \text{dacă } n>m;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{dacă } n=m;\\ 0, & \text{dacă } n<m.\end{cases}$$

410. Fie

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

$P(x)$ şi $Q(x)$ fiind polinoame de x, şi

$$P(a)=Q(a)=0.$$

Ce valori poate lua expresia

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}?$$

Să se determine valorile următoarelor expresii:

411. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

414. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m şi n fiind numere naturale).

415. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

$(5x)^5$

416. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$.

419. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

420. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

421. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

422. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$.

423. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

424. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

425. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m şi n — numere naturale).

426. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n — număr natural).

427. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n — număr natural).

428. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m şi n — numere naturale).

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\ldots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)\right]$.

430. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)^2+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)^2+\ldots+\left(x+\dfrac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$.

Indicaţie. V. exerciţiul 2.

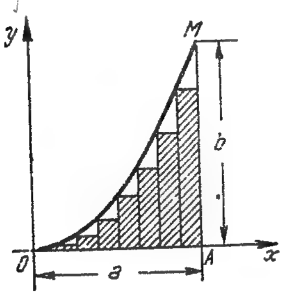

Fig. 3

431. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}$.

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$.

Indicaţie. V. exerciţiul 3.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\ldots+(3n-2)]^2}$.

434. Să se determine aria triunghiului curbiliniu OAM (fig. 3), mărginit de parabola $y=b\left(\dfrac{x}{a}\right)^2$, de axa Ox şi de dreapta $x=a$, considerînd această arie ca fiind limita sumei ariilor dreptunghiurilor înscrise, cu baza $\dfrac{a}{n}$, unde $n\to\infty$.

Să se afle limitele:

435. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

436. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

437. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

438. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

439. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

440. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

441. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

442. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

443. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

444. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n—număr întreg).

445. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

446. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^3}-2}{x+x^2}$.

447. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

448. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

450. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1-5x}-(1+x)}$.

452. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m şi n—numere întregi).

453. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m şi n—numere întregi).

454. Fie $P(x)=a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ şi m număr întreg.

Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\dfrac{a_1}{m}$.

Să se afle limitele:

455. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m şi n— numere întregi).

456. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

457. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$.

458. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

459. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

460. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\sqrt{\dfrac{1}{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}\right)$.

461. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1})$.

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

463. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}]$.

464. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+a_1)\ldots(x+a_n)}-x]$.

466. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$ (n — număr natural).

467. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$ (n — număr natural).

468. Să se studieze comportarea rădăcinilor x_1 şi x_2 ale ecuaţiei de gradul al doilea $ax^2+bx+c=0$, atunci cînd coeficientul a tinde către zero, coeficienţii b şi c fiind constanţi, iar $b\neq0$.

469. Să se determine constantele a şi b din condiţia ca

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

$a=1$, $b=0$

470. Să se determine constantele a_i şi b_i $(i=1,2)$ din condiţiile:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0$$

şi

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0.$$

Să se afle limitele:

471. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$.

472. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m şi n fiind numere întregi).

474. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

475. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

476. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

477. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

478. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

479. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

480. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

481. Să se demonstreze egalităţile:

a) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; b) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;

c) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}a$ $\left(a\neq\frac{2n-1}{2}\pi;\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots\right)$.

Să se afle limitele

482. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

483. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}$.

485. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}a}{x-a}$.

486. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$.

487. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{cosec}x-\operatorname{cosec}a}{x-a}$.

488. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

490. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg}a}{x^2}$.

491. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg}a}{x^2}$.

492. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

493. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$.

494. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

495. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

496. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

497. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

498. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

499. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

500. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

501. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

502. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$.

503. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

504. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

505. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

506. a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

507. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$.

508. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

509. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin^n \dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

510. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0} \left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg} 2x}$.

511. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

512. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

513. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

514. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$.

515. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

516. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}$ $(a_1>0,\ a_2>0)$.

517. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

518. $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

519. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

520. $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

521. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

522. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

523. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg} x}$.

525. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

526. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

527. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$.

528. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

530. $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$.

531. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

532. $\lim\limits_{x\to+\infty} [\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

533. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

534. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\lg\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

535. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

536. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$.

537. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$ $(x>0)$.

538. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$.

539. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

540. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

541. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$.

542. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

543. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$.

544. $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

545. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

546. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

547. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

548. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$.

549. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

550. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

551. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

552. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$ $(x>0)$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0)$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

560. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

561. a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

562. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$. **563.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

564. Să se demonstreze că

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \quad (a>1,\ n>0).$$

565. Să se demonstreze că

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0 \quad (a>1,\ \varepsilon>0).$$

Să se afle limitele:

566. a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.

568. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

569. $\lim\limits_{x\to+0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right]$ $(a>0)$.

570. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\frac{x+1}{x-1}\right)$.

571. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

572. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(xe^x)-\cos(xe^{-x})}{x^3}$.

573. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$. **574.** $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$.

575. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^{\alpha+\beta}x}{\sqrt{(1-\sin^\alpha x)(1-\sin^\beta x)}}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$. $\alpha, \beta \in N$.

576. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$ (v. exercițiul 340).

577. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x}-\operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch} x}$.

578. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln\operatorname{ch} x)$.

579. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}$.

580. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^{n^2}$.

581. $\lim\limits_{x\to\infty}\arcsin\frac{1-x}{1+x}$.

582. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

583. $\lim\limits_{x\to 2} \operatorname{arctg} \dfrac{x-4}{(x-2)^2}$.

584. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

585. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}$.

586. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

587. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

588. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

589. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

591. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}$.

592. $\lim\limits_{x\to+0} x \ln x$.

593. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$.

594. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

595. a) $\lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

596. a) $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; b) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

597. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

598. Să se demonstreze că

a) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$ pentru $x\to-\infty$;

b) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$ pentru $x\to+\infty$.

599. Să se demonstreze că

a) $2^x\to 1-0$ pentru $x\to-0$;

b) $2^x\to 1+0$ pentru $x\to+0$.

600. Să se găsească valorile $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$, dacă $f(x)=x+[x^2]$.

601. Să se calculeze $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ $(n=0, \pm1,\ldots)$, dacă $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin\pi x)$.

Să se afle:

602. $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$.

603. $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

604. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

605. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

606. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin\sin\ldots\sin x}_{n \text{ ori}}$.

607. Dacă $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ și $\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$, putem afirma oare că

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B?$$

Să se considere exemplul: $\varphi(x)=\dfrac{1}{q}$ pentru $x=\dfrac{p}{q}$, unde p și q sînt numere prime între ele, iar $\varphi(x)=0$ pentru x irațional; $\psi(x)=1$ pentru $x\neq 0$ și $\psi(x)=0$ pentru $x=0$; $(x\to 0)$.

608. Să se demonstreze teorema lui Cauchy: dacă funcția $f(x)$ este definită în intervalul $(a, +\infty)$ și mărginită în orice interval finit (a, b), atunci

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)>0)$,

în ipoteza că părțile drepte ale egalităților au limite.

609. Să se demonstreze că dacă: a) funcția $f(x)$ este definită în domeniul $x>a$; b) este mărginită în orice domeniu finit $a<x<b$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$, atunci

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty.$$

610. Să se demonstreze că dacă: a) funcţia $f(x)$ este definită în domeniul $x>a$; b) este mărginită în orice domeniu finit $a<x<b$; c) are limita finită sau infinită

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

atunci

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=l.$$

611. Să se demonstreze că

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x$.

612. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)=2\pi.$$

Indicaţie. Se va folosi formula (*) de la exerciţiul 72.

Să se construiască graficele funcţiilor:

613. a) $y=1-x^{100}$; b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})$ $(-1\leq x\leq 1)$.

614. a) $y=\frac{x^{100}}{1+x^{100}}$ $(x\geq 0)$; b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$ $(x\geq 0)$.

615. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ $(x\neq 0)$.

616. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$.

617. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x\geq 0)$.

618. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x\geq 0)$.

619. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}$ $(x\geq 0)$.

620. a) $y=\sin^{1000}x$; b) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$.

621. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(2^n+x^n)}{n}$ $(x\geq 0)$.

622. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg} x^n$. **624.** $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$.

623. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}$. **625.** $y=\lim\limits_{t\to x}\frac{1}{t-x}\ln\frac{t}{x}$ $(x>0)$.

626. Vom spune că dreapta $y=kx+b$ este *asimptota* curbei $y=f(x)$, dacă

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)]=0.$$

Folosind această ecuaţie, să se deducă condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa asimptotei.

627. Să se determine asimptotele şi să se construiască următoarele curbe:

a) $y=\frac{x^2}{x^2+x-2}$; e) $y=\ln(1+e^x)$;

b) $y=\sqrt{x^2+x}$; f) $y=x+\arccos\frac{1}{x}$;

c) $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$; g) $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$.

d) $y=\frac{xe^x}{e^x-1}$;

Să se afle următoarele limite:

628. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

629. $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})]$, dacă $|x|<1$.

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

631. Fie

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

unde $\psi(x)>0$ şi $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1, 2,\ldots)$ pentru $n\to\infty$, adică $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ pentru $m=1, 2,\ldots$ şi $n>N(\varepsilon)$.

Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\ldots+\varphi(\alpha_{nn})]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\ldots+\psi(\alpha_{nn})], \qquad (1)$$

în ipoteza că membrul al doilea al egalităţii (1) are limită.

Ținînd seamă de ultima teoremă, să se găsească:

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

633. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$.

634. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)\quad (a>0)$.

635. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

636. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

637. Șirul x_n este definit prin egalitățile:

$$x_1=\sqrt{a},\quad x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\quad x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\dots\qquad (a>0).$$

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

638. Șirul de funcții

$$y_n=y_n(x)\qquad (0\leq x\leq 1)$$

este definit în modul următor.

$$y_1=\frac{x}{2},\quad y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2}\qquad (n=2,\ 3,\dots).$$

Să se găsească $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639. Șirul de funcții $y_n=y_n(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ este definit în modul următor:

$$y_1=\frac{x}{2},\quad y_n=\frac{x}{2}+\frac{y_{n-1}^2}{2}\quad (n=2,\ 3,\dots).$$

Să se găsească $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

640. Pentru rezolvarea aproximativă a *ecuației lui Kepler*

$$x-\varepsilon\sin x=m\qquad (0<\varepsilon<1)\tag{1}$$

se pune

$$x_0=m\quad x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\dots,\ x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\dots$$

(metoda aproximațiilor succesive).

Să se demonstreze că există $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ și că numărul ξ este unica rădăcină a ecuației (1).

641. Dacă $\omega_h f$ este oscilația funcției $f(x)$ pe segmentul $|x-\xi|\leqq h$ $(h>0)$, atunci numărul

$$\omega_0(f)=\lim_{h\to 0}\omega_h(f)$$

se numește *oscilația funcției $f(x)$ în punctul ξ.*

Să se determine oscilația funcției $f(x)$ în punctul $x=0$, dacă:

a) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$;

b) $f(x)=\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

c) $f(x)=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$;

d) $f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

e) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$;

f) $f(x)=\frac{1}{x+e^{\frac{1}{x}}}$;

g) $f(x)=(1+|x|)^{\frac{1}{x}}$.

642. Fie

$$f(x)=\sin\frac{1}{x}.$$

Să se demonstreze că oricare ar fi numărul α, satisfăcînd condiția $-1\leqq\alpha\leqq 1$, există un șir $x_n\to 0$ $(n=1,\ 2,\dots)$ astfel, încît

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\alpha.$$

643. Să se determine

$$l=\varliminf_{x\to 0} f(x)\quad \text{și}\quad L=\varlimsup_{x\to 0} f(x),$$

dacă:

a) $f(x)=\sin^2\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

b) $f(x)=(2-x^2)\cos\frac{1}{x}$; c) $f(x)=\left(1+\cos^2\frac{1}{x}\right)^{\sec^2\frac{1}{x}}$.

644. Să se determine

$$l=\varliminf_{x\to\infty} f(x)\quad \text{și}\quad L=\varlimsup_{x\to\infty} f(x),$$

dacă

a) $f(x)=\sin x$; c) $f(x)=2^{\sin x^2}$;

b) $f(x)=x^2\cos^2 x$; d) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2\sin^2 x}$ $(x\geq 0)$.

§ 6. Ordinul de infinitudine şi ordinul de creştere al unei funcţii

1°. Prin expresia

$$\varphi(x)=O^*(\psi(x))$$

se înţelege că funcţiile $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ au în procesul dat $x\to a$ acelaşi *ordin de infinitudine* sau acelaşi *ordin de creştere în sensul strict al cuvîntului*, adică

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=k \quad (0<|k|<+\infty).$$

In particular, dacă pentru $x\to 0$ avem

$$\varphi(x)=O^*(x^n) \quad (n>0),$$

zicem că $\varphi(x)$ este un *infinit mic de ordinul* n în raport cu infinitul mic x.

In mod analog, dacă pentru $x\to\infty$ avem

$$\varphi(x)=O^*(x^n) \quad (n>0),$$

zicem că $\varphi(x)$ este un *infinit mare de ordinul* n în raport ca infinitul mare x

2°. Expresia

$$\varphi(x)=o(\psi(x))$$

înseamnă că funcţia $\varphi(x)$ are pentru $x\to a$ *un ordin de infinitudine mai mare* decît funcţia $\psi(x)$, sau că funcţia $\varphi(x)$ are un *ordin de creştere mai mic* decît funcţia $\psi(x)$, adică

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

3°. Dacă pentru $x\to a$ ordinul de infinitudine (în sensul larg al cuvîntului) al funcţiei $\varphi(x)$ nu este mai mic decît ordinul de infinitudine al unei anumite funcţii pozitive $\psi(x)$, sau dacă ordinul de creştere al funcţiei $\varphi(x)$ nu este mai mare decît ordinul de creştere al funcţiei $\psi(x)$, adică

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)}=k \quad (0\leq k<+\infty),$$

convenim să scriem

$$\varphi(x)=O(\psi(x)).$$

4°. Vom spune că funcţiile $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ sînt *echivalente* $(\varphi(x)\sim\psi(x))$ pentru $x\to a$, dacă

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1.$$

Astfel avem, de exemplu, pentru $x\to 0$:

$$\sin x\sim x; \quad \operatorname{tg} x\sim x;$$

$$a^x-1\sim x\ln a \quad (a>0);$$

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}; \quad \ln(1+x)\sim x.$$

In general, $\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

Pentru determinarea limitei raportului a două funcţii, putem înlocui funcţiile date prin funcţii echivalente lor.

645. Considerînd că unghiul la centru $AOB=x$ (fig. 4) este un infinit mic de ordinul întîi, să se determine ordinele de infinitudine ale următoarelor mărimi: a) coarda $\overline{AB}$; b) săgeata $\overline{CD}$; c) aria sectorului circular AOB; d) aria triunghiului ABC; e) aria trapezului ABB_1A_1; f) aria segmentului circular ABC.

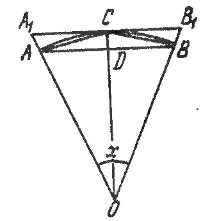

Fig. 4

646. Fie $o(f(x))$ o funcţie oarecare avînd pentru $x\to a$ un ordin de creştere mai mic decît funcţia $f(x)$ şi $O(f(x))$ o funcţie oarecare avînd pentru $x\to a$ acelaşi ordin de creştere (în sensul larg al cuvîntului) ca şi funcţia $f(x)$, unde $f(x)>0$.

Să se arate că:

a) $o(o(f(x)))=o(f(x))$; d) $O(O(f(x))=O(f(x))$;

b) $O(o(f(x)))=o(f(x))$; e) $O(f(x))+o(f(x))=O(f(x))$;

c) $o(O(f(x)))=o(f(x))$; f) $O(f(x))\cdot O(g(x))=O(f(x)g(x))$.

647. Fie $x\to 0$ şi $n>0$. Să se arate că

a) $CO(x^n)=O(x^n)$ (C este o constantă);

b) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ $(n<m)$;

c) $O(x^n)\,O(x^m)=O(x^{n+m})$.

648. Fie $x\to+\infty$ şi $n>0$. Să se arate că

a) $CO(x^n)=O(x^n)$;

b) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ $\quad(n>m)$;

c) $O(x^n)\,O(x^m)=O(x^{n+m})$.

649. Să se arate că simbolul $\sim$ se bucură de proprietăţile: 1) de reflexivitate: $\varphi(x)\sim\varphi(x)$; 2) de simetrie: dacă $\varphi(x)\sim\psi(x)$, atunci $\psi(x)\sim\varphi(x)$; 3) de transitivitate: dacă $\varphi(x)\sim\psi(x)$ şi $\psi(x)\sim\chi(x)$, atunci $\varphi(x)\sim\chi(x)$.

650. Fie $x\to0$. Să se demonstreze următoarele egalităţi:

a) $2x-x^2=O^*(x)$;

b) $x\sin\sqrt{x}=O^*\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$;

c) $x\sin\frac{1}{x}=O(|x|)$;

d) $\ln x=o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon>0)$;

e) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$;

f) $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=O(1)$;

g) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$.

651. Fie $x\to+\infty$. Să se demonstreze următoarele egalităţi:

a) $2x^3-3x^2+1=O^*(x^3)$;

b) $\frac{x+1}{x^2+1}=O^*\left(\frac{1}{x}\right)$;

c) $x+x^2\sin x=O(x^2)$;

d) $\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}=O^*\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

e) $\ln x=o(x^{\varepsilon})$ $(\varepsilon>0)$;

f) $x^pe^{-x}=o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;

g) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$;

h) $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$.

652. Să se demonstreze că pentru x suficient de mare au loc inegalităţile:

a) $x^2+10x+100<0{,}001\,x^3$;

b) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$;

c) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

653. Să presupunem că $x\to0$. Să se pună în evidenţă partea principală de forma Cx^n (C fiind o constantă) şi să se determine

ordinele de infinitudine în raport cu variabila x, ale următoarelor funcţii:

a) $2x-3x^3+x^5$;

b) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

c) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$;

d) $\operatorname{tg}x-\sin x$.

654. Fie $x\to0$. Să se arate că infiniţii mici

a) $f(x)=\frac{1}{\ln x}$; $\quad$ b) $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$

nu pot fi comparaţi cu infinitul mic x^n $(n>0)$, oricare ar fi n, adică egalitatea $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=k$ nu poate avea loc pentru nici un n, k fiind o mărime finită diferită de zero.

655. Fie $x\to1$. Să se pună în evidenţă partea principală de forma $C(x-1)^n$ şi să se determine ordinele de infinitudine în raport cu infinitul mic $x-1$ ale următoarelor funcţii:

a) x^3-3x+2;

b) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$

c) $\ln x$;

d) e^x-ex;

e) x^x-1.

656. Fie $x\to+\infty$. Să se pună în evidenţă partea principală de forma Cx^n şi să se determine ordinele de creştere ale funcţiilor de mai jos în raport cu infinitul mare x:

a) $x^2+100x+10\,000$;

b) $\frac{2x^5}{x^3-3x+1}$;

c) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$;

d) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

657. Fie $x\to+\infty$. Să se pună în evidenţă partea principală de forma $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ şi să se determine ordinele de infinitudine ale funcţiilor de mai jos în raport cu infinitul mic $\frac{1}{x}$:

a) $\frac{x+1}{x^4+1}$;

b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

c) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$;

d) $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$.

658. Fie $x \to 1$. Să se pună în evidenţă partea principală de forma $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ şi să se determine ordinele de creştere ale funcţiilor de mai jos în raport cu infinitul mare $\frac{1}{x-1}$:

a) $\frac{x^2}{x^2-1}$; c) $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$; e) $\frac{\ln x}{(1-x)^2}$.

b) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; d) $\frac{1}{\sin \pi x}$;

659. Să presupunem că $x \to +\infty$ şi fie $f_n(x)=x^n (n=1, 2, \ldots)$. Să se demonstreze că 1) fiecare din funcţiile $f_n(x)$ creşte mai repede decît funcţia precedentă $f_{n-1}(x)$; 2) funcţia e^x creşte mai repede decît oricare din funcţiile $f_n(x) (n=1, 2, \ldots)$.

660. Să presupunem că $x \to +\infty$ şi

$$f_n(x)=\sqrt[n]{x} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Să se demonstreze că 1) fiecare din funcţiile $f_n(x)$ creşte mai încet decît funcţia precedentă $f_{n-1}(x)$; 2) funcţia $f(x)=\ln x$ creşte mai încet decît oricare din funcţiile $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$.

661. Să se demonstreze că oricare ar fi şirul de funcţii

$$f_1(x), \quad f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \quad (x_0 < x < +\infty),$$

se poate construi o funcţie $f(x)$ care să crească pentru $x \to +\infty$ mai repede decît orice funcţie $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$.

§ 7. Continuitatea funcţiilor

1°. Continuitatea unei funcţii. Vom spune că funcţia $f(x)$ este *continuă* pentru $x=x_0$ (*sau în punctul* x_0), dacă

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \tag{1}$$

adică atunci cînd pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$, astfel încît, de îndată ce $|x-x_0|<\delta$, să avem, pentru toate valorile lui $f(x)$ pentru care este definită funcţia, inegalitatea

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Vom spune că funcţia $f(x)$ *este continuă pe o mulţime dată* $X=\{x\}$ (interval, segment etc.) dacă această funcţie este continuă în orice punct al mulţimii X.

Dacă pentru o anumită valoare a lui $x=x_0$ aparţinînd domeniului de definiţie $X=\{x\}$ al funcţiei $f(x)$ sau pentru un punct de acumulare al acestei mulţimi, egalitatea (1) nu este satisfăcută [adică sau (a) nu există numărul $f(x_0)$, cu alte cuvinte funcţia nu este definită în punctul $x=x_0$, sau (b) nu există $\lim_{x\to x_0} f(x)$, sau (c) ambele părţi ale formulei (1) au sens însă egalitatea între ele nu are loc], vom spune că x_0 este un *punct de discontinuitate* al funcţiei $f(x)$.

Distingem: 1) puncte *de discontinuitate* x_0 *de speţa întîi*, pentru care există limite la dreapta şi la stînga, finite:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x) \quad \text{şi} \quad f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

şi 2) *puncte de discontinuitate de speţa a doua*, în care intră toate celelalte puncte de discontinuitate. Diferenţa

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

se numeşte *saltul funcţiei* în punctul x_0.

Dacă este satisfăcută egalitatea

$$f(x_0-0)=f(x_0+0),$$

spunem că punctul de discontinuitate x_0 este *neesenţial*. Dacă cel puţin una din limitele $f(x_0-0)$ sau $f(x_0+0)$ este egală cu simbolul ∞, spunem că x_0 este un punct de *discontinuitate infinită*.

Dacă este satisfăcută egalitatea

$$f(x_0-0)=f(x_0) \quad (\text{sau } f(x_0+0)=f(x_0))$$

spunem că funcţia $f(x_0)$ este *continuă la stînga* (respectiv *la dreapta*) în punctul x_0. Pentru ca funcţia $f(x)$ să fie continuă în punctul x_0 este necesar şi suficient ca

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

2°. Continuitatea funcţiilor elementare. Dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sînt continue în punctul $x=x_0$, funcţiile

$$\text{a) } f(x)\pm g(x); \quad \text{b) } f(x)g(x); \quad \text{c) } \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0)\neq 0)$$

sînt şi ele continue pentru $x=x_0$.

În particular: a) funcţia raţională întreagă

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

este continuă pentru orice valoare a lui x; b) fracţia raţională

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$$

este continuă pentru toate valorile lui x pentru care nu se anulează numitorul.

În general, principalele funcţii elementare: x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x, \ldots$ sînt continue în toate punctele aparţinînd domeniului lor de definiţie.

Următorul rezultat este mai general: dacă funcţia $f(x)$ este continuă pentru $x=x_0$ şi funcţia $g(y)$ este continuă pentru $y=f(x_0)$, atunci funcţia $g(f(x))$ este continuă în punctul $x=x_0$.

3°. T e o r e m e i m p o r t a n t e î n l e g ă t u r ă c u f u n c ţ i i l e c o n t i n u e. Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul finit $[a, b]$, atunci: 1) $f(x)$ este mărginită pe acest segment; 2) îşi atinge pe acest segment marginea inferioară m şi marginea superioară M (*teorema lui Weierstrass*); 3) pe orice interval $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ ia toate valorile intermediare între $f(\alpha)$ şi $f(\beta)$ (*teorema lui Cauchy*). În particular, dacă $f(\alpha) f(\beta) < 0$, atunci există o valoare γ $(\alpha < \gamma < \beta)$ astfel încît $f(\gamma)=0$.

662. Este dat graficul unei funcţii continue $y=f(x)$. Să se determine, geometric, pentru un punct dat a şi un număr $\varepsilon > 0$ numărul $\delta > 0$, astfel încît $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ de îndată ce $|x-a| < \delta$.

663. Ni se cere să confecţionăm o placă pătrată din metal, avînd latura $x_0=10$ cm. Între ce limite poate varia latura x a acestei plăci dacă aria ei $y=x^2$ poate diferi de aria plăcii cerute avînd $y_0=100$ cm² cel mult cu a) ± 1 cm²; b) $\pm 0,1$ cm²; c) $\pm 0,01$ cm²; d) $\pm \varepsilon$ cm²?

664. Muchia unui cub are lungimea cuprinsă între 2 m şi 3 m. Cu ce eroare absolută Δ putem măsura muchia x a acestui cub dacă se cere ca volumul său y să fie calculat cu o eroare absolută egală cel mult cu ε m³, unde: a) $\varepsilon=0,1$ m³; b) $\varepsilon=0,01$ m³; c) $\varepsilon=0,001$ m³?

665. Care este vecinătatea maximă a punctului $x_0=100$ pentru care ordonata graficului funcţiei $y=\sqrt{x}$ diferă de ordonata $y_0=10$ cu mai puţin de $\varepsilon=10^{-n}$ $(n \geq 0)$? Să se determine dimensiunile acestei vecinătăţi dacă $n=0, 1, 2, 3$.

666. Să se demonstreze, folosind limbajul „$\varepsilon-\delta$", că funcţia $f(x)=x^2$ este continuă în punctul $x=5$.

Să se completeze următoarea tabelă:

ε	1	0,1	0,01	0,001	....
δ					

667. Fie $f(x)=\frac{1}{x}$ şi $\varepsilon=0,001$. Să se determine pentru valorile $x_0=0,1$; $0,01$; $0,001$; ... numerele pozitive maxime $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$, astfel încît din inegalitatea $|x-x_0| < \delta$ să rezulte inegalitatea $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

Putem determina oare pentru $\varepsilon=0,001$ dat, un $\delta>0$, care să se bucure pentru toate valorile x_0 din intervalul $(0, 1)$ de proprietatea că $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, oricare ar fi $x_0 \in (0, 1)$, de îndată ce $|x-x_0| < \delta$?

668. Să se formuleze, folosind în mod convenabil limbajul „$\varepsilon-\delta$", afirmaţia: funcţia $f(x)$, definită în punctul x_0, nu este continuă în acest punct.

669. Să presupunem că pentru anumite numere $\varepsilon>0$ se pot determina numerele $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$, astfel încît $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ de îndată ce $|x-x_0| < \delta$.

Putem afirma oare că funcţia $f(x)$ este continuă în punctul x_0, dacă: a) numerele ε formează o mulţime finită; b) numerele ε formează o mulţime infinită de fracţii diadice $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

670. Se consideră funcţia

$$f(x)=x+0,001\,[x].$$

Să se arate că pentru orice $\varepsilon>0,001$ se poate determina un $\delta=\delta(\varepsilon, x)>0$, astfel încît $|f(x')-f(x)| < \varepsilon$ de îndată ce $|x'-x| < \delta$, şi că nu se poate determina pentru $0 < \varepsilon \leq 0,001$ un asemenea număr pentru nici una din valorile lui x.

În care puncte încetează funcţia de a mai fi continuă?

671. Să presupunem că pentru orice număr $\delta>0$ suficient de mic există un $\varepsilon=\varepsilon(\delta, x_0)>0$ pentru care este satisfăcută inegalitatea $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, de îndată ce $|x-x_0| < \delta$. Rezultă oare de aici că funcţia $f(x)$ este continuă în punctul $x=x_0$? Ce proprietate a funcţiei $f(x)$ este pusă în evidenţă cu ajutorul inegalităţilor date?

672. Să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)>0$, astfel încît $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ atrage după sine $|x-x_0| < \delta$. Rezultă oare de aici că funcţia $f(x)$ este continuă în punctul $x=x_0$? Care anume proprietate este pusă în evidenţă de aceste inegalităţi?

673. Să presupunem că pentru orice $\delta>0$ există un număr $\varepsilon=\varepsilon(\delta, x_0)>0$, astfel încît dacă $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ atunci $|x-x_0| < \delta$.

Rezultă oare de aici că funcţia $f(x)$ este continnă pentru $x=x_0$? Ce proprietate a funcţiei $f(x)$ este pusă în evidenţă de aceste inegalităţi?

Să se considere exemplul:

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{dacă } x \text{ este raţional,} \\ \pi-\operatorname{arctg} x, & \text{dacă } x \text{ este iraţional.} \end{cases}$$

674. Să se demonstreze, folosind limbajul „ε—δ“, continuitatea următoarelor funcţii: a) $ax+b$; b) x^2; c) x^3; d) $\sqrt{x}$; e) $\sqrt[3]{x}$; f) $\sin x$; g) $\cos x$; h) $\operatorname{arctg} x$.

Să se studieze continuitatea şi să se reprezinte grafic următoarele funcţii:

675. $f(x)=|x|$.

676. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{dacă } x\neq 2; \\ A, & \text{dacă } x=2. \end{cases}$

677. $f(x)=\dfrac{2}{(1+x)^2}$, dacă $x\neq -1$ şi $f(-1)$ — arbitrar.

678. a) $f_1(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$, dacă $x\neq 0$ şi $f_1(0)=1$;

b) $f_2(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$, dacă $x\neq 0$ şi $f_2(0)=1$.

679. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, dacă $x\neq 0$ şi $f(0)$ — arbitrar.

680. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, dacă $x\neq 0$ şi $f(0)=0$.

681. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$, dacă $x\neq 0$ şi $f(0)=0$.

682. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, dacă $x\neq 1$ şi $f(1)$ — arbitrar.

683. $f(x)=x\ln x^2$, dacă $x\neq 0$ şi $f(0)=a$.

684. $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

685. $f(x)=[x]$.

686. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

Să se determine punctele de discontinuitate ale funcţiilor şi să se studieze natura acestor puncte, dacă:

687. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

688. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

689. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$.

690. $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

691. $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

692. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

693. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$.

694. $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

695. $y=\dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}$.

696. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

697. $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

698. $y=e^{x+\frac{1}{x}}$.

699. $y=\dfrac{1}{\ln x}$.

700. $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

Să se studieze continuitatea şi să se schiţeze graficele următoarelor funcţii:

701. $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

702. $y=x-[x]$.

703. $y=x[x]$.

704. $y=[x]\sin\pi x$.

705. $y=x^2-[x^2]$.

706. $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

707. $y=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

708. $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

709. $y=\left[\dfrac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

710. $y=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{x}$.

711. $y=\sec^2\dfrac{1}{x}$.

712. $y=(-1)^{[x^2]}$.

713. $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}\right)$.

714. $y=\dfrac{1}{x^2\sin^2 x}$.

715 $y=\dfrac{1}{\sin(x^2)}$.

716. $y=\ln\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

717. $y=e^{-\frac{1}{x}}$.

718. $y=1-e^{-\frac{1}{x^2}}$.

719. $y=\operatorname{th}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

Să se studieze continuitatea şi să se construiască graficele următoarelor funcţii:

720. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$ $(x\geq 0)$.

721. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

722. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$.

723. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

724. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

725. $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x)]$.

726. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

727. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

728. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th}tx$.

729. Este oare continuă funcţia

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{dacă } 0\leq x\leq 1,\\ 2-x, & \text{dacă } 1<x\leq 2.\end{cases}$$

730. Fie

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{dacă } x<0,\\ a+x, & \text{dacă } x\geq 0.\end{cases}$$

Ce valoare trebuie atribuită numărului a pentru ca funcţia $f(x)$ să fie continuă?

731. Să se studieze continuitatea funcţiilor de mai jos şi să se determine pentru ele natura punctelor de discontinuitate:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{dacă } 0\leq x\leq 1,\\ 2-x, & \text{dacă } 1<x\leq 2;\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } |x|\leq 1,\\ 1, & \text{dacă } |x|>1;\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & \text{dacă } |x|\leq 1,\\ |x-1|, & \text{dacă } |x|>1;\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{ctg}^2\pi x & \text{pentru } x \text{ neîntreg},\\ 0 & \text{pentru } x \text{ întreg};\end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & \text{pentru } x \text{ raţional},\\ 0 & \text{pentru } x \text{ iraţional}.\end{cases}$

732. Să presupunem că funcţia $d=d(x)$ reprezintă distanţa cea mai scurtă între punctul x de pe axa Ox şi mulţimea punctelor sale formată din segmentele $0\leq x\leq 1$ şi $2\leq x\leq 3$. Se cere expresia analitică a funcţiei $d(x)$, construcţia graficului său precum şi studiul continuităţii sale.

733. Să presupunem că figura E este formată dintr-un triunghi isoscel avînd baza şi înălţimea egale cu unitatea şi din două dreptunghiuri avînd fiecare bazele egale cu unitatea şi înălţimile egale, respectiv, cu 2 şi 3 (fig. 5). Funcţia $S=S(y)$ $(0\leq y<+\infty)$ reprezintă aria părţii din figura E cuprinsă între paralelele $Y=0$ şi $Y=y$, iar funcţia $b=b(y)$ $(0\leq y<+\infty)$ este lungimea secţiunii prin figura E a paralelei $Y=y$. Să se determine expresiile analitice ale funcţiilor S şi b, să se construiască graficele lor şi să se studieze continuitatea lor.

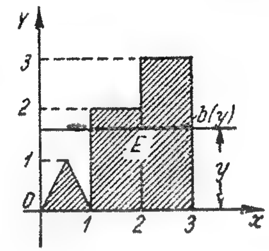

Fig. 5

734. Să se demonstreze că funcţia lui Dirichlet

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\,x)\}$$

este discontinuă pentru orice valoare a lui x.

735. Să se studieze continuitatea funcţiei

$$f(x)=x\chi(x),$$

unde $\chi(x)$ este funcţia lui Dirichlet (v. problema precedentă). Să se schiţeze graficul acestei funcţii.

736. Să se demonstreze că funcţia lui Riemann

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{dacă } x=\dfrac{m}{n}, \text{ unde } m \text{ şi } n \text{ sînt numere prime între ele};\\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional},\end{cases}$$

este discontinuă pentru orice valoare raţională a lui x şi continuă pentru orice valoare iraţională a lui x. Să se schiţeze graficul acestei funcţii.

737. Să se studieze continuitatea funcţiei $f(x)$, definită în modul următor:

$$f(x)=\frac{nx}{n+1},$$

dacă x este o fracţie raţională ireductibilă de forma $\frac{m}{n}(n\geq 1)$, şi

$$f(x)=|x|,$$

dacă x este un număr iraţional. Să se schiţeze graficul acestei funcţii.

738. Funcţia $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ este definită pentru toate valorile variabilei x, cu excepţia lui $x=0$. Ce valoare trebuie atribuită funcţiei $f(x)$ în punctul $x=0$, pentru ca ea să fie continuă în acest punct?

739. Să se arate că oricum am alege numărul $f(1)$, funcţia $f(x)=\frac{1}{1-x}$ nu este continuă în punctul $x=1$.

740. Să presupunem că funcţia $f(x)$ nu este definită în punctul $x=0$. Să se determine numărul $f(0)$ astfel încît $f(x)$ să fie continuă pentru $x=0$, dacă:

a) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

b) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;

c) $f(x)=\sin x \sin\frac{1}{x}$;

d) $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

e) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

f) $f(x)=x^x \quad (x>0)$;

g) $f(x)=x\ln^2 x$.

741. Suma a două funcţii $f(x)+g(x)$ este oare neapărat discontinuă într-un punct dat x_0, dacă: a) funcţia $f(x)$ este continuă, iar funcţia $g(x)$ este discontinuă pentru $x=x_0$; b) ambele funcţii $f(x)$ şi $g(x)$ sînt discontinue în punctul $x=x_0$? Să se dea exemple corespunzătoare.

742. Produsul

$$f(x)\ g(x)$$

este oare neapărat discontinuu într-un punct dat x_0, dacă: a) funcţia $f(x)$ este continuă iar funcţia $g(x)$ este discontinuă în acest punct; b) ambele funcţii $f(x)$ şi $g(x)$ sînt discontinue în punctul $x=x_0$? Să se construiască exemple corespunzătoare.

743. Putem afirma oare că pătratul unei funcţii discontinue este şi el o funcţie discontinuă?

Să se construiască un exemplu de funcţie discontinuă peste tot, al cărei pătrat să fie însă o funcţie continuă.

744. Să se studieze continuitatea funcţiilor $f[g(x)]$ şi $g[f(x)]$, dacă:

a) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ şi $g(x)=1+x^2$;

b) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ şi $g(x)=x(1-x^2)$;

c) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ şi $g(x)=1+x-[x]$.

745. Să se studieze continuitatea funcţiei compuse $y=f(u)$, unde $u=\varphi(x)$, dacă

$$f(u)=\begin{cases} u & \text{pentru } 0<u\leq 1; \\ 2-u & \text{pentru } 1<u<2. \end{cases}$$

şi

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{pentru } x \text{ raţional}; \\ 2-x & \text{pentru } x \text{ iraţional} \end{cases}$$

$(0<x<1)$.

746. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ este continuă, atunci

$$F(x)=|f(x)|$$

este şi ea o funcţie continuă.

747. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ este continuă, atunci funcţia

$$f_c(x)=\begin{cases} -c, & \text{dacă } f(x)<-c; \\ f(x), & \text{dacă } |f(x)|\leq c; \\ c, & \text{dacă } f(x)>c, \end{cases}$$

este şi ea continuă, c fiind un număr pozitiv arbitrar.

748. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, b]$, atunci funcţiile

$$m(x)=\inf_{a\leq\xi\leq x}\{f(\xi)\} \quad \text{şi} \quad M(x)=\sup_{a\leq\xi\leq x}\{f(\xi)\}$$

sînt şi ele continue pe $[a, b]$.

749. Să se demonstreze că dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sînt continue, atunci funcţiile

$$\varphi(x)=\min[f(x), g(x)] \quad \text{şi} \quad \psi(x)=\max[f(x), g(x)]$$

sînt şi ele continue.

750. Fie funcţia $f(x)$ definită şi mărginită pe segmentul $[a, b]$. Să se demonstreze că funcţiile

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\} \quad \text{şi} \quad M(x) = \sup_{a \leq \xi < x} \{f(\xi)\}$$

sînt continue la stînga pe segmentul $[a, b]$, iar funcţiile

$$\overline{m}(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \quad \text{şi} \quad \overline{M}(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

sînt continue la dreapta pe segmentul $[a, b]$.

751. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ este continuă în intervalul $a \leq x < +\infty$ şi există limita finită

$$\lim_{x \to +\infty} f(x),$$

această funcţie este mărginită în intervalul dat.

752. Fie $f(x)$ o funcţie continuă şi mărginită în intervalul $(x_0, +\infty)$. Să se demonstreze că oricare ar fi numărul T, există un număr $x_n \to +\infty$ astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. Fie $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ funcţii continue periodice definite pentru $-\infty < x < +\infty$ şi

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Să se demonstreze că

$$\varphi(x) \equiv \psi(x).$$

754. Să se demonstreze că toate punctele de discontinuitate ale unei funcţii monotone şi mărginite sînt puncte de discontinuitate de prima speţă.

755. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ se bucură de proprietăţile: 1) este definită şi monotonă pe segmentul $[a, b]$; 2) ia toate valorile cuprinse între $f(a)$ şi $f(b)$, această funcţie este continuă pe $[a, b]$.

756. Să se arate că funcţia $f(x) = \sin \frac{1}{x-a}$, dacă $x \neq a$ şi $f(a) = 0$, ia pe orice segment $[a, b]$ toate valorile intermediare cuprinse între $f(a)$ şi $f(b)$, fiind totuşi discontinuă pe $[a, b]$.

757. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ este continuă în intervalul (a, b) şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt valori oarecare din acest interval, între ele există un număr ξ, astfel încît

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)].$$

758. Să presupunem că funcţia $f(x)$ este continuă în intervalul (a, b) şi

$$l = \underline{\lim}_{x \to a} f(x) \quad \text{şi} \quad L = \overline{\lim}_{x \to a} f(x).$$

Să se demonstreze că oricare ar fi numărul λ, unde $l \leq \lambda \leq L$, există un şir $x_n \to a$ $(n = 1, 2, \ldots)$, astfel încît

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lambda.$$

§ 8. Funcţia inversă. Funcţii date sub formă parametrică

1°. Existenţa şi continuitatea funcţiei inverse. Dacă funcţia $y = f(x)$ se bucură de următoarele proprietăţi: 1) este definită şi continuă în intervalul (a, b); 2) este strict monotonă în acest interval, atunci există o funcţie inversă uniformă $x = f^{-1}(y)$, definită, continuă şi strict monotonă în intervalul (A, B), unde $A = \lim_{x \to a+0} f(x)$ şi $B = \lim_{x \to b-0} f(x)$.

Prin *ramură uniformă continuă* a unei funcţii multiforme inverse funcţiei continue date $y = f(x)$ se înţelege o anumită funcţie continuă şi uniformă $x = g(y)$, definită în domeniul maxim de existenţă al ei şi satisfăcînd în acest domeniu ecuaţia $f[g(y)] = 0$.

2°. Continuitatea unei funcţii date sub formă parametrică. Dacă funcţiile $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sînt definite şi continue în intervalul (α, β) şi funcţia $\varphi(t)$ este strict monotonă în acest interval, atunci sistemul de ecuaţii

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

îl defineşte pe y ca o funcţie continuă şi uniformă de x:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

în intervalul (a, b), unde $a = \lim_{t \to \alpha+0} \varphi(t)$ şi $b = \lim_{t \to \beta-0} \varphi(t)$.

759. Să se afle funcţia inversă funcţiei omografice

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ac - bd \neq 0).$$

In ce caz coincide funcţia inversă cu funcţia dată?

760. Să se determine funcţia inversă $x=x(y)$, dacă

$$y=x+[x].$$

761. Să se arate că există o funcţie continuă unică $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$, care satisface *ecuaţia lui Kepler*

$$y-\varepsilon \sin y=x \qquad (0\leq\varepsilon<1).$$

762. Să se arate că ecuaţia

$$\operatorname{ctg} x=kx$$

are în intervalul $0<x<\pi$ o rădăcină continuă unică $x=x(k)$, oricare ar fi k real $(-\infty<k<+\infty)$.

763. Este posibil ca o funcţie nemonotonă $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ să aibă o funcţie inversă uniformă? Să se considere exemplul:

$$y=\begin{cases} x, & \text{dacă } x \text{ este raţional;} \\ -x, & \text{dacă } x \text{ este iraţional.}\end{cases}$$

764. In ce caz coincide funcţia $y=f(x)$ cu inversa ei $x=f^{-1}(y)$?

765. Să se arate că funcţia inversă funcţiei discontinue

$$y=(1+x^2)\operatorname{sgn} x$$

este o funcţie continuă.

766. Să se demonstreze că dacă $f(x)$ este definită şi strict monotonă pe segmentul $[a, b]$ şi avem

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a) \qquad (a\leq x_n\leq b),$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

Să se determine ramurile uniforme şi continue pentru funcţiile inverse ale următoarelor funcţii:

767. $y=x^2$.

768. $y=2x-x^2$.

769. $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

770. $y=\sin x$.

771. $y=\cos x$.

772. $y=\operatorname{tg} x$.

773. Să se arate că mulţimea valorilor funcţiei continue

$$y=1+\sin x,$$

corespunzătoare intervalului $(0<x<2\pi)$, este un segment.

774. Să se demonstreze egalitatea

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

775. Să se demonstreze egalitatea

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x \qquad (x\neq 0).$$

776. Să se demonstreze teorema de adunare pentru arctangentă:

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi,$$

unde $\varepsilon=\varepsilon(x, y)$ este o funcţie care ia una din valorile 0, 1, —1.

Pentru ce valori ale lui y funcţia ε poate fi discontinuă, atunci cînd x este dat? Să se construiască în planul Oxy domeniile de continuitate corespunzătoare funcţiei ε şi să se determine valoarea acestei funcţii în domeniile obţinute.

777. Să se demonstreze teorema de adunare pentru arcsinus:

$$\arcsin x+\arcsin y=(-)1^{\varepsilon}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)+\varepsilon\pi,$$

unde

$$\varepsilon=0, \quad \text{dacă} \quad xy<0 \quad \text{sau} \quad x^2+y^2\leq 1,$$

şi

$$\varepsilon=\operatorname{sgn} x, \quad \text{dacă} \quad x^2+y^2>1.$$

778. Să se demonstreze teorema de adunare pentru arccosinus:

$$\arccos x+\arccos y=(-1)^{\varepsilon}\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right)+2\pi\varepsilon,$$

unde

$$\varepsilon=0, \quad \text{dacă} \quad x+y\geq 0,$$

şi

$$\varepsilon=1, \quad \text{dacă} \quad x+y<0.$$

779. Să se construiască graficele funcţiilor:

a) $y=\arcsin x-\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

b) $y=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x$.

780. Să se afle funcţia $y=y(x)$, dată de ecuaţiile:

$$x=\operatorname{arctg} t,\quad y=\operatorname{arctg} t \qquad (-\infty<t<+\infty).$$

Care este domeniul de existenţă al acestei funcţii?

781. Fie

$$x=\operatorname{ch} t,\quad y=\operatorname{sh} t \quad (-\infty<t<+\infty).$$

Pentru ce domenii de variaţie ale parametrului t putem considera variabila y funcţie uniformă de variabila x? Să se determine expresia lui y pentru diversele domenii.

782. Care sînt condiţiile necesare şi suficiente pentru ca sistemul de ecuaţii

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

să definească pe y ca funcţie uniformă de x?

Să se considere exemplul: $x=\sin^2 t$, $y=\cos^2 t$.

783. In ce condiţii sistemele de ecuaţii

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \quad (a<t<b)$$

şi

$$x=\varphi(\chi(\tau)),\quad y=\psi(\chi(\tau)) \quad (\alpha<\tau<\beta)$$

definesc o aceeaşi funcţie $y=y(x)$?

784. Să presupunem că funcţiile $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ sînt definite şi continue în intervalul (a, b) şi

$$A=\inf_{a<x<b}\varphi(x),\quad B=\sup_{a<x<b}\varphi(x).$$

In ce caz există o funcţie uniformă $f(x)$, definită în intervalul (A, B) şi avînd proprietatea

$$\psi(x)=f(\varphi(x)) \quad \text{pentru} \quad a<x<b?$$

§ 9. Continuitatea uniformă a unei funcţii

1°. Definiţia continuităţii uniforme. Vom spune că funcţia $f(x)$ este *uniform continuă* pe o mulţime dată (interval, segment etc.) $X=\{x\}$, dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ astfel încît, oricare ar fi valorile $x', x''\in X$ pentru care $f(x)$ este definită, inegalitatea

$$|x'-x''|<\delta$$

implică inegalitatea

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

2°. Teorema lui Cantor. O funcţie $f(x)$, definită şi continuă pe segmentul mărginit $[a, b]$, este uniform continuă pe acest segment.

785. Atelierul unei uzine fabrică plăci pătratice ale căror laturi x pot lua valorile cuprinse între limitele de 1 cm şi 10 cm. Cu ce toleranţă δ se pot confecţiona laturile acestor plăci pentru ca, independent de lungimea lor (în limitele indicate), aria lor y să difere de cea proiectată cu mai puţin de ε? Să se efectueze calculul numeric pentru cazurile:

a) $\varepsilon=1$ cm²; b) $\varepsilon=0{,}01$ cm²; c) $\varepsilon=0{,}000\,1$ cm².

786. Un manşon cilindric de lăţime ε şi de lungime δ lunecă pe curba $y=\sqrt[3]{x}$, astfel încît axa manşonului rămîne paralelă cu axa Ox. Care trebuie să fie mărimea lui δ pentru ca acest manşon să parcurgă porţiunea de curbă definită de inegalitatea $-10\leq x\leq 10$, dacă: a) $\varepsilon=1$; b) $\varepsilon=0{,}1$; c) $\varepsilon=0{,}001$; d) ε este un număr arbitrar de mic.

787. Să se formuleze în mod convenabil, folosind limbajul „$\varepsilon-\delta$", următoarea afirmaţie: o funcţie $f(x)$ este continuă pe o mulţime oarecare (interval, segment etc.), dar nu este uniform continuă pe această mulţime.

788. Să se arate că funcţia

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

este continuă în intervalul $(0, 1)$, dar nu este uniform continuă în acest interval.

789. Să se arate că funcţia

$$f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$$

este continuă şi mărginită în intervalul $(0, 1)$, dar nu este uniform continuă în acest interval.

790. Să se arate că funcţia

$$f(x)=\sin x^2$$

este continuă şi mărginită în intervalul infinit $-\infty<x<+\infty$, dar nu este uniform continuă în acest interval.

791. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ este definită şi continuă în domeniul $a\leq x<+\infty$ şi există

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

atunci $f(x)$ este uniform continuă în acest domeniu.

792. Să se arate că funcţia nemărginită

$$f(x)=x+\sin x$$

este uniform continuă pe toată axa $-\infty<x<+\infty$.

793. Este oare uniform continuă funcţia $f(x)=x^2$ în intervalul a) $(-l, l)$, l fiind un număr pozitiv arbitrar de mare; b) în intervalul $(-\infty, +\infty)$?

Să se studieze continuitatea uniformă a următoarelor funcţii în domeniile arătate:

?

794. $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$ $\quad(-1\leq x\leq 1)$.

795. $f(x)=\ln x$ $\quad(0<x<1)$.

796. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad(0<x<\pi)$.

797. $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$ $\quad(0<x<1)$.

798. $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$.

799. $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad(1\leq x<+\infty)$.

800. $f(x)=x\sin x$ $\quad(0\leq x<+\infty)$.

801. Să se arate că funcţia $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ este uniform continuă în fiecare din intervalele

$$J_1=(-1<x<0) \quad \text{şi} \quad J_2=(0<x<1)$$

în parte, dar nu este uniform continuă pe suma acestor intervale

$$J_1+J_2=\{0<|x|<1\}.$$

802. Să se determine pentru $\varepsilon>0$ un $\delta=\delta(\varepsilon)$ care să satisfacă condiţiile de continuitate uniformă pentru funcţia $f(x)$ în intervalul dat, dacă:

a) $f(x)=5x-3$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$;

b) $f(x)=x^2-2x-1$ $\quad(-2\leq x\leq 5)$;

c) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad(0{,}1\leq x\leq 1)$;

d) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad(0\leq x<+\infty)$;

e) $f(x)=2\sin x-\cos x$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$;

f) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$ şi $f(0)=0$ $\quad(0\leq x\leq\pi)$.

803. În cîte segmente egale este suficient să împărţim segmentul $[1, 10]$ pentru ca oscilaţia funcţiei $f(x)=x^2$ să fie mai mică decît 0,0001 pe fiecare din aceste segmente?

804. Să se demonstreze că suma şi produsul unui număr finit de funcţii uniform continue în intervalul (a, b) sînt funcţii uniform continue în acest interval.

805. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ mărginită şi monotonă este continuă în intervalul (a, b) finit sau infinit, atunci această funcţie este uniform continuă în acest interval.

806. Să se demonstreze că, condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia $f(x)$, definită şi continuă în intervalul finit (a, b), să poată fi prelungită continuu pe segmentul $[a, b]$ este ca funcţia $f(x)$ să fie uniform continuă în intervalul (a, b).

807. Numim *modul de continuitate* al funcţiei $f(x)$ în intervalul (a, b) funcţia

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|,$$

unde x_1 şi x_2 sînt două puncte arbitrare din (a, b) satisfăcînd condiţia $|x_1-x_2|\leq\delta$.

Să se demonstreze că condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia $f(x)$ să fie uniform continuă în intervalul (a, b) este ca

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0.$$

808. Să se evalueze modulul de continuitate $\omega_f(\delta)$ (v. problema precedentă) sub forma

$$\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha,$$

unde C şi α sînt constante, dacă:

a) $f(x)=x^3$ $\quad (0 \leq x \leq 1)$;

b) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad (0 \leq x \leq a)$ şi $(a<x<+\infty)$;

c) $f(x)=\sin x+\cos x$ $\quad (0 \leq x \leq 2\pi)$.

§ 10. Ecuaţii funcţionale

809. Să se demonstreze că singura funcţie continuă $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ care satisface pentru toate valorile reale ale lui x şi y ecuaţia

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \tag{1}$$

este funcţia liniară omogenă

$$f(x)=ax,$$

în care $a=f(1)$ este o constantă arbitrară.

810. Să se demonstreze că funcţia monotonă $f(x)$ care satisface ecuaţia (1) este o funcţie liniară omogenă.

811. Să se demonstreze că funcţia $f(x)$ care satisface ecuaţia (1) şi este mărginită într-un interval oricît de mic $(-\varepsilon, \varepsilon)$ este o funcţie liniară şi omogenă.

812. Să se demonstreze că singura funcţie continuă $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ neidentic nulă care satisface pentru toate valorile lui x şi y ecuaţia

$$f(x+y)=f(x)f(y), \tag{2}$$

este funcţia exponenţială

$$f(x)=a^x,$$

unde $a=f(1)$ este o constantă pozitivă.

813. Să se demonstreze că funcţia $f(x)$ mărginită şi neidentic nulă în intervalul $(0, \varepsilon)$, care satisface ecuaţia (2), este o funcţie exponenţială.

814. Să se demonstreze că singura funcţie continuă $f(x)$ $(0<x<+\infty)$ neidentic nulă care satisface pentru toate valorile pozitive x şi y ecuaţia

$$f(xy)=f(x)+f(y),$$

este funcţia logaritmică

$$f(x)=\log_a x,$$

unde a este o constantă pozitivă.

815. Să se demonstreze că singura funcţie continuă $f(x)$ $(0<x<+\infty)$ neidentic nulă care satisface pentru toate valorile pozitive x şi y ecuaţia

$$f(xy)=f(x)f(y), \tag{3}$$

este funcţia

$$f(x)=x^a,$$

unde a este o constantă.

816. Să se determine toate funcţiile continue $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ care satisfac, pentru toate valorile reale x şi y, ecuaţia (3).

817. Să se arate că funcţia discontinuă

$$f(x)=\operatorname{sgn} x$$

verifică ecuaţia (3).

818. Să se determine toate funcţiile continue $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ care satisfac, oricare ar fi valorile reale x şi y, ecuaţia

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

819. Să se determine toate funcţiile continue şi mărginite $f(x)$ şi $g(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ care satisfac, oricare ar fi valorile reale x şi y, sistemul de ecuaţii:

$$f(x+y)=f(x)f(y)-g(x)g(y),$$

$$g(x+y)=f(x)g(y)+f(y)g(x),$$

şi în plus condiţiile de normare:

$$f(0)+1 \quad \text{şi} \quad g(0)=0.$$

I n d i c a ţ i e. Se consideră funcţia

$$F(x)=f^2(x)+g^2(x).$$

820. Fie

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$$

şi

$$\Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$$

diferenţele finite ale funcţiei $f(x)$ de ordinul întîi, respectiv ordinul al doilea.

Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)\,(-\infty<x<+\infty)$ este continuă şi

$$\Delta^2 f(x)\equiv 0,$$

atunci această funcţie este liniară, adică

$$f(x)=ax+b,$$

a, b fiind constante.

CAPITOLUL II

CALCULUL DIFERENŢIAL AL FUNCŢIILOR DE O VARIABILĂ

§ 1. Derivata unei funcţii explicite

1°. Definiţia derivatei. Dacă x şi $x_1=x+\Delta x$ sînt valori ale variabilei independente, diferenţa

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

se numeşte *creşterea* funcţiei $y=f(x)$.

Dacă expresia

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

are sens, ea se numeşte *derivata* funcţiei $y=f(x)$, iar funcţia $f(x)$ se zice că este *derivabilă*.

Din punct de vedere geometric, numărul $f'(x)$ reprezintă coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcţiei $y=f(x)$ în punctul x ($\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$) (fig. 6).

2°. Principalele reguli de derivare. Dacă c este o mărime constantă iar funcţiile $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ sînt derivabile, atunci

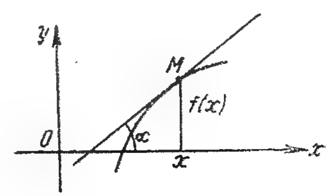

Fig. 6

1) $c'=0$;

2) $(cu)'=cu'$;

3) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$;

4) $(uv)'=u'v+v'u$;

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$;

6) $(u^n)'=nu^{n-1}u'$ (n fiind o constantă);

7) dacă funcţiile $y=f(u)$ şi $u=\varphi(x)$ sînt derivabile, atunci

$$y'_x=y'_u u'_x.$$

3°. Formule fundamentale. Dacă x este o variabilă independentă, atunci

I. $(x^n)'=nx^{n-1}$ (n fiind o constantă).

II. $(\sin x)'=\cos x$.

III. $(\cos x)'=-\sin x$.

IV. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

V. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VII. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VIII. $(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

IX. $(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

X. $(a^x)'=a^x \ln a \quad (a>0)$;
$(e^x)'=e^x$.

XI. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a} \quad (a>0)$;
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

XII. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$.

XIII. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.

XIV. $(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XV. $(\operatorname{cth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4°. Derivate la dreapta şi derivate la stînga. Expresiile

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{şi} \quad f'_+ x=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

se numesc respectiv *derivată la stînga* şi *derivată la dreapta* a funcţiei $f(x)$ în punctul x.

Pentru ca funcţia $f(x)$ să fie derivabilă este necesar şi suficient ca

$$f'_-(x)=f'_+(x).$$

5°. Derivata infinită. Dacă într-un punct x avem

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty,$$

spunem că în punctul x funcţia $f(x)$ are o *derivată infinită*. In acest caz, tangenta la graficul funcţiei $y=f(x)$ în punctul x este perpendiculară pe axa Ox.

821. Să se determine creşterea Δx a variabilei x şi creşterea corespunzătoare Δy a funcţiei $y=\lg x$, dacă x variază între 1 şi 1 000.

822. Să se determine creşterea Δx a variabilei x şi creşterea corespunzătoare Δy a funcţiei $y=\dfrac{1}{x^2}$, dacă x variază între 0,01 şi 0,001.

823. Să admitem că variabilei x îi dăm o creştere Δx. Să se determine creşterea Δy, dacă:

a) $y=ax+b$; b) $y=ax^2+bx+c$; c) $y=a^x$.

824. Să se demonstreze că:

a) $\Delta[f(x)+g(x)]=\Delta f(x)+\Delta g(x)$;

b) $\Delta[f(x)g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

825. Prin punctele $A(2, 4)$ şi $A'(2+\Delta x, 4+\Delta y)$ de pe curba $y=x^2$ ducem secanta AA'. Să se determine coeficientul unghiular al acestei secante dacă: a) $\Delta x=1$; b) $\Delta x=0{,}1$; c) $\Delta x=0{,}01$; d) Δx este arbitrar de mic.

Care este valoarea coeficientului unghiular al tangentei la curba dată în punctul A?

826. Segmentul $1\leq x\leq 1+h$ de pe axa Ox este reprezentat pe axa Oy cu ajutorul funcţiei $y=x^3$. Să se determine coeficientul mediu de întindere şi să se efectueze calculul numeric pentru cazurile: a) $h=0{,}1$; b) $h=0{,}01$; c) $h=0{,}001$.

Care este valoarea coeficientului de întindere pentru această transformare în punctul $x=1$?

827. Să presupunem că legea mişcării unui punct pe axa Ox este dată de formula

$$x=10t+5t^2,$$

unde t este timpul în secunde şi x distanţa în metri. Să se afle viteza medie de mişcare în intervalul de timp $20\leq t\leq 20+\Delta t$ şi să se efectueze calculul numeric pentru cazurile: a) $\Delta t=1$; b) $\Delta t=0{,}1$; c) $\Delta t=0{,}01$. Care este valoarea vitezei mişcării la momentul $t=20$?

828. Plecînd de la definiţia derivatei, să se afle direct derivatele următoarelor funcţii: a) x^2; b) x^3; c) $\dfrac{1}{x}$; d) $\sqrt{x}$; e) $\sqrt[3]{x}$; f) $\operatorname{tg} x$; g) $\operatorname{ctg} x$; h) $\arcsin x$; i) $\arccos x$; j) $\operatorname{arctg} x$.

829. Să se calculeze $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ pentru

$$f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

830. Să se calculeze $f'(2)$ pentru

$$f(x)=x^2\sin(x-2).$$

831. Să se calculeze $f'(1)$ dacă

$$f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

832. Să se afle

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

dacă funcţia $f(x)$ este derivabilă în punctul a.

833. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ este derivabilă şi n este un număr natural, atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \qquad (1)$$

Invers, dacă pentru funcţia $f(x)$ există limita (1), putem afirma oare că această funcţie este derivabilă. Să se studieze exemplul funcţiei lui Dirichlet (v. cap. I, problema 734).

Folosind formulele de derivare, să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

834. $y=2+x-x^2$.

Care este valoarea lui $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$?

835. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$.

Pentru ce valori ale lui x avem: a) $y'(x)=0$; b) $y'(x)=-2$; c) $y'(x)=10$?

836. $y=a^5+5a^3x^2-x^5$.

837. $y=\frac{ax+b}{a+b}$.

838. $y=(x-a)(x-b)$.

839. $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

840. $y=(x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha)$.

841. $y=(1+nx^m)(1+mx^n)$.

842. $y=(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

843. $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$.

844. Să se demonstreze formula

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}.$$

Să se calculeze derivatele funcţiilor:

845. $y=\frac{2x}{1-x^2}$.

846. $y=\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

847. $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

848. $y=\frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$.

849. $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$.

850. $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

851. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

852. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

853. $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

854. $y=x\sqrt{1+x^2}$.

855. $y=(1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$.

856. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

857. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

858. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$.

859. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(x+\sqrt{1+x^2})}$.

860. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$.

865. $y=\sin^n x\cos nx$.

866. $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

867. $y=\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$.

868. $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

869. $y=\frac{1}{\cos^n x}$.

870. $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

871. $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

872. $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x$.

873. $y=4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2x}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8x}$.

874. $y=\sec^2\frac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$.

875. $y=\sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3x)]$.

876. $y=e^{-x^2}$.

877. $y=2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$.

878. $y=e^x(x^2-2x+2)$.

879. $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1+x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

880. $y=e^x\cdot\left(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

881. $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

882. $y=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

883. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

884. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{x}\cdot\left(\frac{b}{x}\right)^{a}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^{b} \qquad (a>0,\ b>0).$

885. $y=x^{a^{a}}+a^{x^{a}}+a^{a^{x}} \qquad (a>0).$

886. $y=\lg^{3}x^{2}.$

887. $y=\ln(\ln(\ln x)).$

888. $y=\ln(\ln^{2}(\ln^{3}x)).$

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^{2})-\frac{1}{2(1+x)}.$

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^{2}-1}{x^{2}+1}.$

891. $y=\frac{1}{4(1+x^{4})}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^{4}}{1+x^{4}}.$

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \qquad (0<k<1).$

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}).$

895. $y=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1}).$

896. $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})-\sqrt{1+x^{2}}.$

897. $y=x\ln^{2}(x+\sqrt{1+x^{2}})-2\sqrt{1+x^{2}}\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})+2x.$

898. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^{2}+a^{2}}+\frac{a^{2}}{2}\ln(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}}).$

899. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}} \qquad (a>0,\ b>0).$

900. $y=\frac{2+3x^{2}}{x^{4}}\sqrt{1-x^{2}}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^{2}}}{x}.$

901. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

902. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$

903. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^{2}x+\ln\sin x.$

904. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$

905. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^{2}x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}.$

906. $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^{2}-a^{2}}\sin x}{a+b\cos x} \qquad (0\leq|a|<|b|).$

907. $y=\frac{1}{x}(\ln^{3}x+3\ln^{2}x+6\ln x+6).$

908. $y=\frac{1}{4x^{4}}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^{4}}.$

909. $y=\frac{3}{2}(1-\sqrt[3]{1+x^{2}})^{2}+3\ln(1+\sqrt[3]{1+x^{2}}).$

910. $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right].$

911. $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)].$

912. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x.$

913. $y=\arcsin\frac{x}{2}.$

914. $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}.$

915. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^{2}}{a}.$

916. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}.$

917. $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}.$

918. $y=x+\sqrt{1-x^{2}}\cdot\arccos x.$

919. $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}.$

920. $y=\arccos\frac{1}{x}.$

921. $y=\arcsin(\sin x).$

922. $y=\arccos(\cos^{2}x).$

923. $y=\arcsin(\sin x-\cos x).$

924. $y=\arccos\sqrt{1-x^{2}}.$

925. $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}.$

926. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right).$

927. $y=\frac{2}{\sqrt{a^{2}-b^{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \qquad (a>b\geq 0).$

928. $y=\arcsin\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}}.$

929. $y=\frac{1}{\arccos^{2}(x^{2})}.$

930. $y=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^{3}).$

931. $y=\ln(1+\sin^{2}x)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x).$

932. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

933. $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^{2}+b^{2}}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}.$

934. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}+\frac{a^{2}}{2}\arcsin\frac{x}{a} \qquad (a>0).$

935. $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

936. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$.

937. $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$.

938. $y=\frac{\arccos x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

939. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$.

940. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

941. $y=\frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}$.

942. $y=\frac{x^6}{1+x^{12}}-\operatorname{arcctg}x^6$.

943. $y=\ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}$.

944. $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

945. $y=\operatorname{arcctg}\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$ $(a>0)$.

946. $y=\frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2}+2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}$.

947. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

948. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$.

949. $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}+$
$+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

950. $y=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$.

951. $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

952. $y=\operatorname{arctg}(x+\sqrt{1+x^2})$.

953. $y=\arcsin\left(\frac{\sin a\sin x}{1-\cos a\cos x}\right)$.

954. $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$.

955. $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$.

956. $y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

957. $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$.

958. $y=\arcsin(\sin x^2)+\arccos(\cos x^2)$.

959. $y=e^{m\arcsin x}[\cos(m\arcsin x)+\sin(m\arcsin x)]$.

960. $y=\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

961. $y=x+x^x+x^{x^x}$ $(x>0)$.

962. $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$ $(a>0,\ x>0)$.

963. $y=\sqrt[x]{x}$ $(x>0)$.

964. $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

965. $y=(\ln x)^x : x^{\ln x}$.

966. $y=\log_x e$.

967. $y=\ln(\operatorname{ch}x)+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

968. $y=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right)$.

969. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$.

970. $y=\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$.

971. $y=\frac{b}{a}x+\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$ $(0\leq|b|<a)$.

972. Să se calculeze derivata funcţiei

$$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}),$$

introducînd variabila auxiliară $u=\cos^2 x$.

Să se calculeze, folosind metoda indicată la exerciţiul 972, derivatele funcţiilor:

973. $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\frac{1}{2}\right]$.

974. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt[4]{1+x^4}\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

975. $y=\frac{e^{-x^2}\arcsin\left(e^{-x^2}\right)}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-2x^2}\right)$.

976. $y=\frac{a^x}{1+a^{2x}}-\frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arcctg} a^{-x}$.

977. Să se calculeze derivatele şi să se construiască graficele funcţiilor şi ale derivatelor lor, dacă:

a) $y=|x|$; b) $y=x|x|$; c) $y=\ln|x|$.

978. Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

a) $y=\left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$;
b) $y=|\sin^3 x|$;
c) $y=\arccos\frac{1}{|x|}$;
d) $y=[x]\sin^2\pi x$.

Să se calculeze derivatele şi să se construiască graficele funcţiilor şi ale derivatelor lor, dacă:

979. $y=\begin{cases} 1-x & \text{pentru } -\infty<x<1; \\ (1-x)(2-x) & \text{pentru } 1\leqq x\leqq 2; \\ -(2-x) & \text{pentru } 2<x<+\infty. \end{cases}$

980. $y=\begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pentru } a\leqq x\leqq b; \\ 0 & \text{în afara segmentului } [a, b]. \end{cases}$

981. $y=\begin{cases} x & \text{pentru } x<0; \\ \ln(1+x) & \text{pentru } x\geqq 0. \end{cases}$

982. $y=\begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{pentru } |x|\leqq 1; \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{2} & \text{pentru } |x|>1. \end{cases}$

983. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & \text{pentru } |x|\leq 1; \\ \frac{1}{e} & \text{pentru } |x|>1. \end{cases}$

984. Derivata logaritmului unei funcţii date se numeşte *derivata logaritmică* a acestei funcţii:

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Să se calculeze derivata logaritmică a funcţiei y, dacă:

a) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; c) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

b) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$; d) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

985. Fie $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ funcţii derivabile de x. Să se calculeze derivata funcţiei y, dacă:

a) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; b) $y=\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

c) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x)\neq 0;\ \psi(x)>0)$;
d) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.

986. Să se calculeze y', dacă:

a) $y=f(x^2)$;
b) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;
c) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$;
d) $y=f\{f[f(x)]\}$,

în care $f(u)$ este o funcţie derivabilă.

937. Să se demonstreze următoarea regulă de derivare a unui determinant de ordinul n:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) f_{12}(x)\ldots f_{1n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{k1}(x) f_{k2}(x)\ldots f_{kn}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(x) f_{n2}(x)\ldots f_{nn}(x) \end{vmatrix}'=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) f_{12}(x)\ldots f_{1n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f'_{k1}(x) f'_{k2}(x)\ldots f'_{kn}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(x) f_{n2}(x)\ldots f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

938. Să se calculeze $F'(x)$, dacă

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

989. Să se calculeze $F'(x)$, dacă

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

990. Să presupunem dat graficul unei funcții. Să se construiască aproximativ graficul derivatei acestei funcții.

991. Să se arate că funcția

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{pentru } x\neq 0; \\ 0 & \text{pentru } x=0 \end{cases}$$

are o derivată discontinuă.

992. In ce condiții este funcția

$$f(x)=x^n \sin \frac{1}{x} \quad (x\neq 0) \quad \text{și} \quad f(0)=0$$

a) continuă în punctul $x=0$; b) derivabilă pentru $x=0$; c) cu derivată continuă pentru $x=0$?

993. In ce condiție are funcția

$$f(x)=|x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x\neq 0) \quad \text{și} \quad f(0)=0 \quad (m>0)$$

a) o derivată mărginită în vecinătatea originii coordonatelor;
b) o derivată nemărginită în această vecinătate.

994. Să se calculeze $f'(a)$, dacă

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

unde funcția $\varphi(x)$ este continuă în punctul $x=a$.

995. Să se arate că funcția

$$f(x)=|x-a|\varphi(x),$$

unde $\varphi(x)$ este o funcție continuă și $\varphi(a)\neq 0$, nu este derivabilă în punctul a.

Care sînt valorile derivatelor la stînga și la dreapta $f'_-(a)$ și $f'_+(a)$?

996. Să se construiască un exemplu de funcție continuă care nu admite derivată în punctele date: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

997. Să se arate că funcția

$$f(x)=x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right| \quad (x\neq 0) \quad \text{și} \quad f(0)=0$$

are puncte în care nu este derivabilă în orice vecinătate a punctului $x=0$, fiind totuși derivabilă în punctul $x=0$.

Să se schițeze graficul acestei funcții.

998. Să se arate că funcția

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \text{ este rațional;} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional,} \end{cases}$$

este derivabilă numai în punctul $x=0$.

999. Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcții:

a) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; c) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$;

b) $y=|\cos x|$; d) $y=\arcsin(\cos x)$;

e) $y=\begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{pentru } |x|\leq 1; \\ |x|-1 & \text{pentru } |x|>1. \end{cases}$

Să se determine derivata la stînga $f'_-(x)$ și derivata la dreapta $f'_+(x)$ a funcției $f(x)$, dacă:

1000. $f(x)=|x|$. 1001. $f(x)=[x]\sin\pi x$.

1002. $f(x)=x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$.

1003. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$.

1004. $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ $(x\neq 0$, $f(0)=0$.

1005. $f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}$. 1006. $f(x)=|\ln|x||$ $(x\neq 0)$

1007. $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1008. $f(x)=(x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$ $(x\neq 2)$, $f(2)=0$.

1009. Să se arate că funcția $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ pentru $x\neq 0$ și $f(0)=0$ este continuă în punctul $x=0$, dar nu are în acest punct nici derivată la stînga, nici derivată la dreapta.

1010. Fie

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{dacă } x\leq x_0; \\ ax+b, & \text{dacă } x>x_0. \end{cases}$$

Cum trebuie să alegem coeficienţii a şi b pentru ca funcţia $f(x)$ să fie continuă şi derivabilă în punctul $x=x_0$?

1011. Fie

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{dacă } x\leq x_0;\\ ax+b, & \text{dacă } x>x_0,\end{cases}$$

unde funcţia $f(x)$ admite o derivată la stînga în punctul $x=x_0$.

Cum trebuie să alegem coeficienţii a şi b pentru ca funcţia $F(x)$ să fie continuă şi derivabilă în punctul x_0?

1012. Să se construiască pe segmentul $a\leq x\leq b$ conjugata a două semidrepte

$$y=k_1(x-a)\ (-\infty<x<a) \quad \text{şi} \quad y=k_2(x-b) \quad (b<x<+\infty)$$

cu ajutorul parabolei cubice

$$y=A(x-a)(x-b)(x-c),$$

unde parametrii A şi c rămîn să fie determinaţi ulterior.

1013. Să se completeze porţiunea curbei $y=\frac{m^2}{|x|}$ $(|x|>c)$ cu parabola

$$y=a+bx^2 \quad (|x|\leq c)$$

(a şi b fiind parametri necunoscuţi) în aşa fel, încît curba pe care o obţinem să fie netedă.

1014. Putem afirma oare că suma

$$F(x)=f(x)+g(x)$$

nu este derivabilă în punctul $x=x_0$, dacă: a) funcţia $f(x)$ este derivabilă în punctul x_0, iar funcţia $g(x)$ nu este derivabilă în acest punct; b) ambele funcţii $f(x)$ şi $g(x)$ nu sînt derivabile în punctul x_0?

1015. Putem afirma oare că produsul

$$F(x)=f(x)\,g(x)$$

nu este derivabil în punctul $x=x_0$, dacă: a) funcţia $f(x)$ este derivabilă în punctul x_0, iar funcţia $g(x)$ nu este derivabilă în acest punct; b) ambele funcţii $f(x)$ şi $g(x)$ nu sînt derivabile în punctul x_0?

Să se studieze exemplele: a) $f(x)=x$, $g(x)=|x|$; b) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|$.

1016. Ce se poate spune despre derivabilitatea funcţiei

$$F(x)=f(g(x))$$

într-un punct dat $x=x_0$, dacă: a) funcţia $f(x)$ este derivabilă în punctul $x=g(x_0)$, iar funcţia $g(x)$ nu este derivabilă în punctul $x=x_0$; b) funcţia $f(x)$ nu este derivabilă în punctul $x=g(x_0)$, iar funcţia $g(x)$ este derivabilă în punctul $x=x_0$; c) funcţia $f(x)$ nu este derivabilă în punctul $x=g(x_0)$ şi funcţia $g(x)$ nu este derivabilă în punctul $x=x_0$?

Să se studieze exemplele:

a) $f(x)=x^2$; $g(x)=|x|$; b) $f(x)=|x|$; $g(x)=x^2$;

c) $f(x)=2x+|x|$; $g(x)=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}|x|$.

1017. In ce puncte graficul funcţiei

$$y=x+\sqrt[3]{\sin x}$$

are tangente verticale?

Să se construiască acest grafic.

1018. Poate avea o funcţie $f(x)$ într-un punct de discontinuitate al ei: a) o derivată finită; b) o derivată infinită?

Să se studieze exemplul: $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

1019. Dacă funcţia $f(x)$ este derivabilă în intervalul finit (a,b) şi dacă

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty,$$

atunci sînt oare neapărat valabile relaţiile

$$1)\ \lim_{x\to a} f'(x)=\infty; \quad 2)\ \overline{\lim_{x\to a}}\,|f'(x)|=\infty?$$

Să se considere exemplul: $f(x)=\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$ pentru $x\to 0$.

1020. Dacă funcţia $f(x)$ este derivabilă în intervalul finit (a,b) şi dacă

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\infty,$$

are oare neapărat loc relaţia

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty?$$

Să se studieze exemplul: $f(x)=\sqrt[3]{x}$ pentru $x\to 0$.

1021. Să presupunem că funcția $f(x)$ este derivabilă în intervalul $(x_0, +\infty)$ și că există $\lim\limits_{x\to a+\infty} f(x)$. Rezultă oare de aici că există $\lim\limits_{x\to a+\infty} f'(x)$?

Să se studieze exemplul:

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}.$$

1022. Să presupunem că funcția $f(x)$ este mărginită și derivabilă în intervalul $(x_0, +\infty)$ și că există $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$; rezultă oare de aici că există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ finită sau infinită?

Să se studieze exemplul:

$$f(x)=\cos(\ln x).$$

1023. Putem oare deriva membru cu membru o inegalitate?

1024. Să se afle expresiile sumelor:

$$P_n=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$$

$$Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\ldots+n^2x^{n-1}.$$

Indicație. Considerăm $(x+x^2+\ldots+x^n)'$.

1025. Să se afle expresiile sumelor:

$$S_n=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$$

și

$$T_n=\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx.$$

1026. Folosind identitatea

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

să se determine expresia sumei

$$S_n=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

1027. Să se demonstreze că derivata unei funcții derivabile pare este o funcție impară, iar derivata unei funcții derivabile impare este o funcție pară.

Să se dea interpretarea geometrică a acestui fapt.

1028. Să se demonstreze că derivata unei funcții derivabile periodice este și ea o funcție periodică, avînd aceeași perioadă.

1029. Cu ce viteză crește aria cercului în momentul cînd raza acestui cerc este $R=10$ cm, dacă raza cercului crește uniform cu viteza de 2 cm/s?

1030. Cu ce viteză variază aria și diagonala unui dreptunghi în momentul cînd o latură a dreptunghiului este $x=20$ m, iar cealaltă latură $y=15$ m, dacă prima latură a dreptunghiului se micșorează cu viteza de 1 m/s, iar a doua latură crește cu viteza de 2 m/s?

1031. Dintr-un port au plecat simultan vapoarele A și B cu direcțiile respective nord și est. Cu ce viteză crește distanța între aceste vapoare dacă viteza vaporului A este egală cu 30 km/h, iar cea a vaporului B cu 40 km/h?

1032. Fie

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{dacă } 0\leq x\leq 2;\\ 2x-2, & \text{dacă } 2<x<+\infty,\end{cases}$$

și $S(x)$ aria mărginită de curba $y=f(x)$, de axa Ox și de perpendiculara pe axa Ox, dusă în punctul x $(x\geq 0)$.

Să se găsească expresia analitică a funcției $S(x)$, să se calculeze derivata $S'(x)$ și să se construiască graficul funcției $y=S'(x)$.

1033. Funcția $S(x)$ reprezintă aria mărginită de arcul de cerc $y=\sqrt{a^2-x^2}$, pe axa Ox și de două perpendiculare la axa Ox, duse în punctele 0 și x $(|x|\leq a)$.

Să se determine expresia analitică a funcției $S(x)$, a derivatei $S'(x)$ și să se construiască graficul acestei derivate.

§ 2. Derivata funcției inverse. Derivata unei funcții date sub formă parametrică. Derivata unei funcții date sub formă implicită

1°. Derivata funcției inverse. Dacă funcția derivabilă $y=f(x)$ $(a<x<b)$, avînd derivata $f'(x)\neq 0$, admite o funcție inversă uniformă și continuă $x=f^{-1}(y)$, atunci funcția inversă este și ea derivabilă și are loc relația

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

2°. Derivata unei funcţii date sub formă parametrică. Dacă sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{array}\right\} \quad (\alpha<t<\beta),$$

unde $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sînt funcţii derivabile şi $\varphi'(t)\neq 0$, defineşte pe y ca o funcţie continuă şi uniformă de x:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

atunci derivata acestei funcţii există şi poate fi calculată după formula

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

3°. Derivata unei funcţii date sub formă implicită. Dacă funcţia derivabilă $y=y(x)$ satisface ecuaţia

$$F(x, y)=0,$$

atunci derivata $y'=y'(x)$ a acestei funcţii implicite poate fi determinată din ecuaţia

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)]=0,$$

unde $F(x, y)$ este considerată ca o funcţie compusă de variabila x.

(Mai detaliat despre derivarea funcţiilor implicite vezi partea a doua, cap. VI, § 3).

1034. Să se arate că există o funcţie uniformă $y=y(x)$, definită de ecuaţia

$$y^3+3y=x,$$

şi să se calculeze derivata ei y'_x.

1035. Să se arate că există o funcţie uniformă $y=y(x)$, definită de ecuaţia

$$y-\varepsilon \sin y=x \qquad (0\leqq \varepsilon<1),$$

şi să se calculeze derivata ei y'_x.

1036. Să se determine domeniul de existenţă al funcţiilor inverse $x=x(y)$ şi să se calculeze derivatele lor, dacă:

a) $y=x+\ln x \quad (x>0)$; c) $y=\operatorname{sh} x$;

b) $y=x+e^x$; d) $y=\operatorname{th} x$.

1037. Să se separe ramurile uniforme şi continue ale funcţiilor

inverse $x=x(y)$, să se calculeze derivatele lor şi să se construiască graficele respective, dacă:

a) $y=2x^2-x^4$; b) $y=\frac{x^2}{1+x^2}$; c) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

1038. Să se schiţeze graficul funcţiei $y=y(x)$ şi să se calculeze derivata y'_x, dacă $x=-1+2t-t^2$, $y=2-3t+t^3$. Care este valoarea lui $y'_x(x)$ în punctele $x=0$ şi $x=-1$? In care punct $M(x, y)$ este derivata $y'_x(x)=0$?

Să se calculeze derivatele y'_x (pentru valori pozitive ale parametrului), dacă:

1039. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $\qquad y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

1040. $x=\sin^2 t$, $\qquad y=\cos^2 t$.

1041. $x=a\cos t$, $\qquad y=b\sin t$.

1042. $x=a\operatorname{ch} t$, $\qquad y=b\operatorname{sh} t$.

1043. $x=a\cos^3 t$, $\qquad y=a\sin^3 t$.

1044. $x=a(t-\sin t)$, $\qquad y=a(1-\cos t)$.

1045. $x=e^{2t}\cos^2 t$, $\qquad y=e^{2t}\sin^2 t$.

1046. $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\qquad y=\arccos\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. Să se arate că funcţia $y=y(x)$, definită de sistemul de ecuaţii

$$x=2t+|t|, \quad y=5t^2+4t|t|,$$

este derivabilă în punctul $t=0$, totuşi derivata ei nu poate fi calculată cu ajutorul formulei obişnuite.

Să se calculeze derivatele y'_x ale următoarelor funcţii date sub formă implicită:

1048. $x^2+2xy-y^2=2x$.

Care este valoarea lui y' pentru $x=0$, $y=1$ şi pentru $x=2$, $y=0$?

1049. $y^2=2px$ (parabolă).

1050. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (elipsă).

1051. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ (parabolă).

1052. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (astroidă).

1053. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (spirală logaritmică).

1054. Să se calculeze y'_x dacă:

a) $r=a\varphi$ (spirala lui Arhimede).
b) $r=a(1+\cos\varphi)$ (cardioidă).
c) $r=ae^{m\varphi}$ (spirală logaritmică)

unde $r=\sqrt{x^2+y^2}$ și $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ sînt coordonatele polare.

§ 3. Interpretarea geometrică a derivatei

1°. Ecuația tangentei și ecuația normalei. Ecuația *tangentei* MT și ecuația *normalei* MN la graficul funcției derivabile $y=f(x)$ într-un punct al ei $M(x, y)$ (fig. 7) sînt date respectiv de relațiile:

$$Y-y=y'(X-x)$$

și

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

unde X, Y sînt coordonatele curente ale tangentei sau ale normalei, iar $y'=f'(x)$ este valoarea derivatei în punctul de tangență.

2°. Segmentele tangentei și ale normalei. Pentru segmentele tangentei și ale normalei: $\overline{PT}$ — subtangentă, $\overline{PN}$ — subnormală, $\overline{MT}$ — tangentă, $\overline{MN}$ — normală (fig. 7), ținînd seamă de faptul că $\operatorname{tg}\alpha=y'$, obținem următoarele valori:

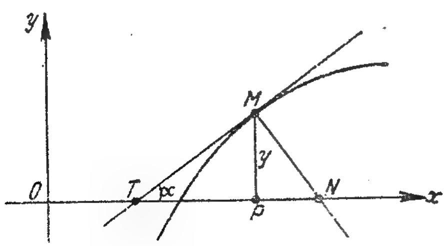

Fig. 7

$$\overline{PT}=\left|\frac{y}{y'}\right|,\quad \overline{PN}=|yy'|,$$

$$\overline{MT}=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2},\quad \overline{MN}=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

3°. Unghiul format de tangentă și de raza vectoare a punctului de tangență. Dacă $r=f(\varphi)$ este ecuația curbei în coordonate polare și β este unghiul format de tangenta MT și raza vectoare OM a punctului de tangență M (fig. 8), atunci

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{r}{r'}.$$

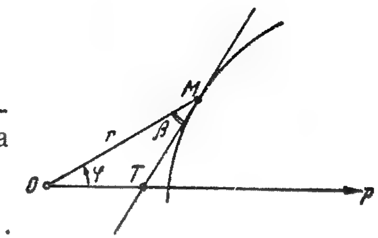

Fig. 8

1055. Să se scrie ecuația tangentei și ecuația normalei la curba

$$y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$$

în punctele: a) $A(-1,0)$; b) $B(2,3)$; c) $C(3, 0)$.

1056. In ce puncte ale curbei

$$y=2+x-x^2$$

este tangenta a) paralelă cu axa Ox; b) paralelă cu bisectoarea primului cadran?

1057. Să se demonstreze că parabola

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \qquad (a\neq 0,\ x_1<x_2)$$

intersectează axa Ox sub unghiurile α și β $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$, care sînt egale între ele.

1058. Să se determine pe curba

$$y=2\sin x \qquad (-\pi\leq x\leq\pi)$$

acele porțiuni pentru care „panta" curbei (adică $|y'|$) este mai mare decît 1.

1059. Funcțiile

$$y=x \quad \text{și} \quad y_1=x+0{,}01\sin 1\,000\pi x$$

diferă una de cealaltă cu cel mult 0,01. Ce se poate spune despre valoarea maximă a diferenței derivatelor acestor funcții?

Să se construiască graficele corespunzătoare.

1060. Sub ce unghi intersectează curba

$$y=\ln x$$

axa Ox?

1061. Sub ce unghi se intersectează curbele

$$y=x^2 \quad \text{și} \quad x=y^2?$$

1062. Sub ce unghiuri se intersectează curbele

$$y=\sin x \quad \text{şi} \quad y=\cos x?$$

1063. Pentru ce valori ale parametrului n va intersecta curba

$$y=\operatorname{arctg} nx \qquad (n>0)$$

axa Ox sub un unghi mai mare decît 89°?

1064. Să se determine unghiul format de tangenta la dreapta şi de tangenta la stînga a curbei: a) $y=\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}$ în punctul $x=0$; b) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ în punctul $x=1$.

1065. Să se arate că tangenta la spirala logaritmică

$$r=ae^{m\varphi}$$

(a şi m fiind constante) formează un unghi constant cu raza vectoare a punctului de tangenţă.

1066. Determinînd lungimea subtangentei la curba

$$y=ax^n,$$

să se dea o metodă de construire a tangentei la această curbă.

1067. Să se demonstreze că la parabola

$$y^2=2px$$

a) subtangenta este egală cu dublul abscisei punctului de tangenţă; b) subnormala este constantă. Să se dea o metodă de construire a tangentei la parabolă.

1068. Să se demonstreze că funcţia exponenţială

$$y=a^x \qquad (a>0)$$

are subtangenta constantă. Să se dea o metodă de construire a tangentei la curba exponenţială.

1069. Să se calculeze lungimea normalei într-un punct oarecare $M(x_0, y_0)$ al lănţişorului

$$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

1070. Să se demonstreze că la astroida

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \qquad (a>0)$$

lungimea segmentului tangentei cuprins între axele de coordonate este o mărime constantă.

1071. Ce relaţie trebuie să existe între coeficienţii a, b şi c ai parabolei

$$y=ax^2+bx+c,$$

dacă această parabolă este tangentă axei Ox?

1072. In ce condiţii este tangentă parabola cubică

$$y=x^3+px+q$$

axei Ox?

1073. Pentru ce valoare a parametrului a este tangentă parabola

$$y=ax^2$$

la curba $y=\ln x$?

1074. Să se demonstreze că curbele

$$y=f(x) \quad (f(x)>0)$$

şi

$$y=f(x)\sin ax,$$

unde $f(x)$ este o funcţie derivabilă, sînt tangente una alteia în punctele comune.

1075. Să se arate că familiile de hiperbole

$$x^2-y^2=a$$

şi

$$xy=b$$

formează o *reţea ortogonală*, adică curbele acestor familii se intersectează sub unghiuri drepte.

1076. Să se demonstreze că familiile de parabole

$$y^2=4a(a-x) \qquad (a>0)$$

şi

$$y^2=4b(b+x) \qquad (b>0)$$

formează o reţea ortogonală.

1077. Să se scrie ecuaţia tangentei şi a normalei la curba

$$x=2t-t^2, \quad y=3t-t^3$$

în punctele: a) $t=0$; b) $t=1$.

1078. Să se scrie ecuaţia tangentei şi ecuaţia normalei la curba

$$x=\frac{2t+t^2}{1+t^3},\quad y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$$

în punctele: a) $t=0$; b) $t=1$; c) $t=\infty$.

1079. Să se scrie ecuaţia tangentei la cicloida

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

într-un punct arbitrar $t=t_0$. Să se dea o metodă de construcţie a tangentei la cicloidă.

1080. Să se demonstreze că tractricea

$$x=a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right),\quad y=a\sin t\qquad (a>0,\ 0<t<\pi)$$

are tangenta constantă.

Să se scrie ecuaţiile tangentei şi ale normalei în puncte date, la următoarele curbe:

1081. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1,\qquad M(6;6,4).$

1082. $xy+\ln y=1,\qquad M(1;1).$

§ 4. Diferenţiala unei funcţii

1°. Diferenţiala unei funcţii. Dacă creşterea funcţiei $y=f(x)$, de variabila independentă x, poate fi pusă sub forma

$$\Delta y=A(x)\,dx+o(dx),$$

unde $dx=\Delta x$, vom numi partea principală a acestei creşteri *diferenţiala funcţiei* y:

$$dy=A(x)\,dx.$$

Pentru ca diferenţiala unei funcţii $y=f(x)$ să existe este necesar şi suficient ca să existe derivata finită $y'=f'(x)$ şi are loc relaţia:

$$dy=y'dx. \tag{1}$$

Formula (1) rămîne valabilă şi în cazul cînd variabila x este o funcţie de o altă variabilă independentă (*proprietatea de invarianţă a diferenţialei de ordinul întîi*).

2°. Evaluarea creşterilor mici ale unei funcţii. Pentru calculul creşterilor mici ale unei funcţii derivabile $f(x)$ ne putem folosi de formula

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x;$$

eroarea relativă introdusă de această formulă poate fi făcută oricît de mică pentru $|\Delta x|$ suficient de mic, dacă $f'(x)\neq 0$.

In particular, dacă variabila independentă x este determinată cu o eroare absolută egală cu $|\Delta x|$, atunci $|\Delta y|$, eroarea absolută, şi δy, eroarea relativă a funcţiei $y=f(x)$, se exprimă aproximativ cu ajutorul următoarelor formule:

$$|\Delta y|=|f'(x)\,\Delta x|$$

şi

$$\delta y=\left|[\ln f(x)]'\Delta x\right|=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\,\Delta x\right|.$$

1083. Să se calculeze pentru funcţia

$$f(x)=x^3-2x+1$$

1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$ şi să se compare aceste valori dacă: a) $\Delta x=1$; b) $\Delta x=0,1$; c) $\Delta x=0,01$.

1084. Ecuaţia unei mişcări este dată de formula

$$x=5t^2,$$

unde t se măsoară în secunde şi x în metri.

Să se determine, la momentul $t=2$s, Δx — creşterea drumului şi dx — diferenţiala drumului şi să se compare aceste două, dacă: a) $\Delta t=1$ s; b) $\Delta t=0,1$ s; c) $\Delta t=0,001$ s.

Să se calculeze diferenţialele funcţiei y, dacă:

1085. $y=\frac{1}{x}$.

1086. $y=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\qquad (a\neq 0)$.

1087. $y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

1088. $y=\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$.

1089. $y=\arcsin\frac{x}{a}\qquad (a\neq 0)$.

1090. Să se calculeze:

a) $d(xe^x)$;

b) $d(\sin x-x\cos x)$;

c) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$;

d) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

e) $d(\sqrt{a^2+x^2})$;

f) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

g) $d\ln(1-x^2)$;

h) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$;

i) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

Fie u, v, w funcţii derivabile de x. Să se calculeze diferenţiala funcţiei y, dacă:

1091. $y=uvw$.

1092. $y=\frac{u}{v^2}$.

1093. $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

1094. $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

1095. $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1096. Să se calculeze:

a) $\frac{d}{dx^3}(x^3-2x^6-x^9)$;

b) $\frac{d}{dx^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$;

c) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$;

c) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;

d) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

1097. Intr-un sector circular avem raza $R=100$ cm şi unghiul la centru $\alpha=60°$. Cu cît variază aria acestui sector, dacă: a) raza lui R se măreşte cu 1 cm; b) unghiul α se micşorează cu $30'$?

Să se dea soluţia exactă şi soluţia aproximativă.

1098. Perioada de oscilaţie a unui pendul (în secunde) este dată de formula

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

unde l este lungimea pendulului, în cm, şi $g=981$ cm/s^2 este acceleraţia forţei gravitaţionale.

Cu cît trebuie modificată lungimea pendulului $l=20$ cm, pentru ca perioada T să crească cu 0,05 s?

Inlocuind creşterea unei funcţii prin diferenţiala ei, să se calculeze aproximativ următoarele valori:

1099. $\sqrt[3]{1,02}$.

1100. $\sin 29°$.

1101. $\cos 151°$.

1102. $\operatorname{arctg} 1,05$.

1103. $\lg 11$.

1104. Să se demonstreze formula aproximativă

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a} \qquad (a>0),$$

în care $|x|\ll a$ (relaţia $A\ll B$ între numerele pozitive A şi B înseamnă că A este foarte mic în comparaţie cu B).

Cu ajutorul acestei formule să se calculeze aproximativ: a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{34}$; c) $\sqrt{120}$ şi să se compare cu datele din tabele.

1105. Să se demonstreze formula aproximativă

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}} \qquad (a>0),$$

unde $|x|\ll a$.

Să se calculeze cu ajutorul acestei formule valorile aproximative:

a) $\sqrt[3]{9}$; b) $\sqrt[4]{80}$; c) $\sqrt[7]{100}$; d) $\sqrt[10]{1\,000}$.

1106. Latura unui pătrat este $x=2,4\text{ m}\pm 0,05\text{ m}$. Cu ce eroare absolută şi relativă poate fi calculată aria acestui pătrat?

1107. Cu ce eroare relativă putem măsura raza R a unei sfere dacă se cere ca volumul ei să fie determinat cu o exactitate de 1%?

1108. Pentru determinarea acceleraţiei forţei gravitaţionale cu ajutorul oscilaţiei pendulului se foloseşte formula

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

unde l este lungimea pendulului, T este perioada completă a oscilaţiei pendulului. Ce influenţă are asupra valorii lui g eroarea relativă δ, cu care am măsura: a) lungimea l; b) perioadă T?

1109. Să să determine eroarea absolută a logaritmului zecimal al numărului x $(x>0)$, dacă eroarea relativă a acestui număr este δ.

1110. Să se demonstreze că unghiurile pot fi determinate mai exact după tabela logaritmică a tangentei decît după tabela logaritmică a sinusurilor, avînd acelaşi număr de zecimale.

§ 5. Derivate şi diferenţiale de ordin superior

1°. **Definiţii fundamentale.** *Derivatele de ordin superior ale funcţiei* $y=f(x)$ se definesc succesiv cu ajutorul relaţiilor (în ipoteza că operaţiile respective au sens!):

$$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}' \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Diferenţialele de ordin superior ale funcţiei $y=f(x)$ se definesc succesiv cu ajutorul formulelor

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \qquad (n=2, 3, \ldots),$$

unde am pus $d^1y = dy = y'dx$.

Dacă x este variabila independentă, punem:

$$d^2x = d^3x = \ldots = 0;$$

în cazul acesta sînt valabile formulele

$$d^n y = y^{(n)}\,dx^n \quad \text{și} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2°. Formule fundamentale:

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0)$; $\qquad (e^x)^{(n)} = e^x$.

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

IV. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$,

V. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3°. Formula lui Leibniz. Dacă funcțiile $u=\varphi(x)$ și $v=\psi(x)$ au derivate de ordinul n (sînt derivabile de n ori), atunci

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

unde $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ și C_n^i este numărul combinărilor de n elemente luate cîte i.

In mod analog pentru diferențiala $d^n(uv)$ obținem:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}u\, d^i v,$$

unde am pus $d^0u = u$ și $d^0v = v$.

Să calculeze y'', dacă:

1111. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

1112. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1113. $y = e^{-x^2}$.

1114. $y = \operatorname{tg} x$.

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

1116. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1117. $y = x \ln x$.

1118. $x = \ln f(x)$.

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

1120. Să se determine $y(0)$, $y'(0)$ și $y''(0)$, dacă

$$y = e^{\sin x}\cos(\sin x).$$

Fie $u=\varphi(x)$ și $v=\psi(x)$ funcții de două ori derivabile. Să se calculeze y'', dacă:

1121. $y = u^2$.

1122. $y = \ln\frac{u}{v}$.

1123. $y = \sqrt{u^2+v^2}$.

1124. $y = u^v \quad (u>0)$.

Fie $f(x)$ o funcție de două ori derivabilă. Să se calculeze y'' și y''', dacă:

1125. $y = f(x^2)$.

1126. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

1127. $y = f(e^x)$.

1128. $y = f(\ln x)$.

1129. $y = f(\varphi(x))$, unde $\varphi(x)$ este o funcție derivabilă de un număr suficient de ori.

1130. Să se calculeze d^2y pentru funcția

$$y = e^x$$

în următoarele două cazuri: a) x este variabila independentă; b) x este o variabilă intermediară.

Considerînd pe x ca o variabilă independentă, să se calculeze d^2y, dacă:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}$. **1132.** $y = \frac{\ln x}{x}$. **1133.** $y = x^x$.

Fie u și v funcții de două ori derivabile de variabila x. Să se calculeze d^2y, dacă:

1134. $y = uv$.

1135. $y = \frac{u}{v}$.

1136. $y = u^m v^n$ (m și n fiind constante).

1137. $y = a^u \quad (a>0)$.

1138. $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1139. $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

Să se calculeze derivatele y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} ale funcției $y=y(x)$, dată sub forma parametrică, dacă:

1140. $x = 2t - t^2$, $\qquad y = 3t - t^3$.

1141. $x = a\cos t$, $\qquad y = a\sin t$.

1142. $x=a(t-\sin t), \qquad y=a(1-\cos t).$

1143. $x=e^t\cos t, \qquad y=e^t\sin t.$

1144. $x=f'(t), \qquad y=tf'(t)-f(t).$

1145. Fie o funcţie $y=f(x)$, derivabilă de un număr suficient de ori. Să se calculeze derivatele x', x'', x''', x^{IV} ale funcţiei inverse $x=f^{-1}(y)$, presupunînd că aceste derivate există.

Să se calculeze y'_x, y''_{x^2} şi y'''_{x^3} ale funcţiei $y=y(x)$ dată sub forma implicită:

1146. $x^2+y^2=25$. Care sînt valorile lui y', y'' şi y''' în punctul $M(3, 4)$?

1147. $y^2=2px.$ **1148.** $x^2-xy+y^2=1.$

Să se calculeze y'_x şi y''_{x^2}, dacă:

1149. $y^2+2\ln y=x^4.$

1150. $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} \quad (a>0).$

1151. Fie funcţia $f(x)$ definită şi de două ori derivabilă pentru $x\leqq x_0$. Cum trebuie aleşi coeficienţii a, b şi c pentru ca funcţia

$$f(x)=\begin{cases} f(x), & \text{dacă } x\leqq x_0; \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & \text{dacă } x>x_0, \end{cases}$$

să fie de două ori derivabilă.

1152. Un punct se mişcă rectiliniu după legea

$$s=10+20t-5t^2.$$

Să se găsească viteza şi acceleraţia mişcării. Care este valoarea vitezei şi a acceleraţiei la momentul $t=2$?

1153. Punctul $M(x, y)$ se mişcă uniform pe circumferinţa $x^2+y^2=a^2$, făcînd un tur în T s. Să se găsească viteza v şi acceleraţia j a proiecţiei punctului M pe axa Ox, dacă la momentul $t=0$ punctul a avut poziţia $M_0(a, 0)$.

1154. Un punct material greu $M(x, y)$ este aruncat în planul vertical Oxy sub un unghi α faţă de planul orizontal, cu viteza iniţială v_0. Să se scrie (neglijînd rezistenţa aerului) ecuaţia de mişcare şi să se determine mărimea vitezei v şi a acceleraţiei j, precum şi traiectoria mişcării. Care este săgeata traiectoriei şi care este distanţa pînă la locul în care punctul material greu atinge din nou pămîntul?

1155. Ecuaţiile de mişcare ale unui punct sînt

$$x=4\sin\omega t-3\cos\omega t, \quad y=3\sin\omega t+4\cos\omega t$$

(ω fiind o constantă).

Să se determine traiectoria mişcării, mărimea vitezei şi mărimea acceleraţiei.

Să se calculeze derivatele de ordinul indicat mai jos:

1156. $y=x(2x-1)^2(x+3)^3$; să se calculeze $y^{(6)}$ şi $y^{(7)}$.

1157. $y=\frac{a}{x^m}$; să se calculeze y'''.

1158. $y=\sqrt{x}$; să se calculeze $y^{(10)}$.

1159. $y=\frac{x}{1-x}$; să se calculeze $y^{(8)}$.

1160. $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; să se calculeze $y^{(100)}$.

1161. $y=x^2e^{2x}$; să se calculeze $y^{(20)}$.

1162. $y=\frac{e^x}{x}$; să se calculeze $y^{(10)}$.

1163. $y=x\ln x$; să se calculeze $y^{(5)}$.

1164. $y=\frac{\ln x}{x}$; să se calculeze $y^{(5)}$.

1165. $y=x^2\sin 2x$; să se calculeze $y^{(50)}$.

1166. $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$; să se calculeze y'''.

1167. $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$; să se calculeze $y^{(10)}$.

1168. $y=x\operatorname{sh} x$; să se calculeze $y^{(100)}$.

1169. $y=e^x\cos x$; să se calculeze y^{IV}.

1170. $y=\sin^2 x\ln x$; să se calculeze $y^{(6)}$.

Considerînd pe x variabilă independentă, să se calculeze în exemplele următoare diferenţialele de ordinul indicat:

1171. $y=x^5$; să se calculeze d^5y.

1172. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$; să se calculeze d^3y.

1173. $y=x\cos 2x$; să se calculeze $d^{10}y$.

1174. $y=e^x\ln x$; să se calculeze d^4y.

1175. $y=\cos x\cdot\operatorname{ch} x$; să se calculeze d^6y.

Să se calculeze în următoarele exemple diferențialele de ordinul indicat, ținînd seamă de faptul că u este funcție de x, derivabilă de un număr suficient de ori.

1176. $y=u^2$; să se calculeze $d^{10}y$.

1177. $y=e^u$; să se calculeze d^4y.

1178. $y=\ln u$; să se calculeze d^3y.

1179. Să se calculeze d^2y, d^3y și d^4y ale funcției $y=f(x)$, considerînd pe x funcție de o altă variabilă independentă.

1180. Să se exprime derivatele y'' și y''' ale funcției $y=f(x)$ cu ajutorul diferențialelor succesive ale variabilelor x și y, fără a presupune că x este variabilă independentă.

1181. Să se arate că funcția

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare, verifică ecuația

$$y''+y=0.$$

1182. Să se arate că funcția

$$y=C_1\operatorname{ch}x+C_2\operatorname{sh}x,$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare, verifică ecuația

$$y''-y=0.$$

1183. Să se arate că funcția

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x},$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare și λ_1, λ_2 — constante, verifică ecuația

$$y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2y=0.$$

1184. Să se arate că funcția

$$y=x^n[C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)],$$

C_1 și C_2 fiind constante arbitrare, iar n constant, verifică ecuația

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2)y=0.$$

1185. Să se arate că funcția

$$y=e^{\frac{x}{\sqrt2}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt2}+C_2\sin\frac{x}{\sqrt2}\right)+e^{-\frac{x}{\sqrt2}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt2}+C_4\sin\frac{x}{\sqrt2}\right)$$

unde C_1, C_2, C_3 și C_4 sînt constante arbitrare verifică ecuația

$$y^{\mathrm{IV}}+y=0.$$

1186. Să se demonstreze că dacă funcția $f(x)$ este derivabilă de n ori, atunci

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^nf^{(n)}(ax+b).$$

1187. Să se calculeze $P^{(n)}(x)$, dacă

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Să se calculeze $y^{(n)}$, dacă:

1188. $y=\dfrac{ax+b}{cx+b}$.

1189. $y=\dfrac{1}{x(1-x)}$.

1190. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Indicație. Se va descompune funcția în fracții simple.

1191. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

1192. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

1193. $y=\sin^2 x$.

1194. $y=\cos^2 x$.

1195. $y=\sin^3 x$.

1196. $y=\cos^3 x$.

1197. $y=\sin ax\sin bx$.

1198. $y=\cos ax\cos bx$.

1199. $y=\sin ax\cos bx$.

1200. $y=\sin^2 ax\cos bx$.

1201. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

1202. $y=x\cos ax$.

1203. $y=x^2\sin ax$.

1204. $y=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

1205. $y=\dfrac{e^x}{x}$.

1206. $y=e^x\cos x$.

1207. $y=e^x\sin x$.

1208. $y=\ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$.

1209. $y=e^{ax}P(x)$, $P(x)$ fiind un polinom.

1210. $y=x\operatorname{sh}x$.

Să se calculeze d^ny, dacă:

1211. $y=x^ne^n$.

1212. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

1213. Să se demonstreze egalitățile

$$1)\ [e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$$

și

$$2)\ [e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi),$$

unde

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{și} \quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1214. Să se calculeze $y^{(n)}$, dacă

a) $y=\operatorname{ch} ax\cos bx$; c) $y=\operatorname{sh} ax\cos bx$;
b) $y=\operatorname{ch} ax\sin bx$; d) $y=\operatorname{sh} ax\sin bx$.

1215. Transformînd funcția $f(x)=\sin^{2p}x$, unde p este un număr natural, în polinomul trigonometric $f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx$, să se calculeze $f^{(n)}(x)$.

Indicație. Se va pune $\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$, unde $t=\cos x+i\sin x$ și $\bar{t}=\cos x-i\sin x$ și se va folosi formula lui Moivre.

1216. Să se calculeze $f^{(n)}(x)$, dacă

a) $f(x)=\sin^{2p+1}x$;
b) $f(x)=\cos^{2p}x$;
c) $f(x)=\cos^{2p+1}x$,

unde p este un număr pozitiv întreg (v. problema precedentă).

Dacă

$$f(x)=f_1(x)+if_2(x),$$

unde $i=\sqrt{-1}$ și $f_1(x)$, $f_2(x)$ sînt funcții reale de variabila reală x, considerăm prin definiție că

$$f'(x)=f_1'(x)+if_2'(x).$$

1217. Folosind identitatea

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right),$$

să se demonstreze că

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin[(n+1)\operatorname{arcctg} x].$$

Indicație. Se va aplica formula lui Moivre.

1218. Să se calculeze derivata de ordinul n a funcției

$$f(x)=\operatorname{arctg} x.$$

Să se calculeze $f^{(n)}(0)$, dacă:

1219. a) $f(x)=\frac{1}{(1-2x)(1+x)}$; b) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

1220. a) $f(x)=x^2e^{ax}$; b) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; c) $f(x)=\arcsin x$.

1221. a) $f(x)=\cos(m\arcsin x)$; b) $f(x)=\sin(m\arcsin x)$.

1222. a) $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$; b) $f(x)=(\arcsin x)^2$.

1223. Să se calculeze $f^{(n)}(a)$, dacă

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

unde funcția $\varphi(x)$ are o derivată continuă de ordinul $(n-1)$ în vecinătatea punctului a.

1224. Să se demonstreze că funcția

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & \text{dacă } x\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

(n fiind un număr natural) admite în punctul $x=0$ derivate pînă la ordinul n inclusiv și nu admite derivata de ordinul $n+1$.

1225. Să se demonstreze că funcția

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{dacă } x\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } x=0,\end{cases}$$

este derivabilă de o infinitate de ori în punctul $x=0$.

Să se construiască graficul acestei funcții.

1226. Să se demonstreze că *polinoamele lui Cebîșev*

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x) \quad (m=1,2,\ldots)$$

verifică ecuația

$$(1-x^2)T_m''(x)-xT_m'(x)+m^2T_m(x)=0.$$

1227. Să se demonstreze că *polinoamele lui Legendre*

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)} \quad (m=0,1,2,\ldots)$$

verifică ecuația

$$(1-x^2)P_m''(x)-2xP_m'(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

I n d i c a ţ i e. Se va deriva de $m+1$ ori egalitatea $(x^2-1)u'=2mxu$, unde $u=(x^2-1)^m$.

1228. *Polinoamele lui Cebîşev-Laguerre* se definesc cu ajutorul formulei

$$L_m(x)=e^x(x^m e^{-x})^{(m)} \qquad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

Să se găsească expresia explicită a polinomului $L_m(x)$.

Să se demonstreze că $L_m(x)$ satisface ecuaţia

$$xL''_m(x)+(1-x)L'_m(x)+mL(x)=0.$$

I n d i c a ţ i e. Se va folosi egalitatea $xu'+(x-m)u=0$, unde $u=x^m e^{-x}$.

1229. Fie $y=f(u)$ şi $u=\varphi(x)$, unde $f(u)$ şi $\varphi(x)$ sînt funcţii derivabile de n ori.

Să se demonstreze că

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\sum_{k=1}^{n} A_k(x)f^{(k)}(u),$$

unde coeficienţii $A_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ nu depind de funcţia $f(u)$.

1230. Să se demonstreze că pentru derivata de ordinul n a funcţiei compuse $y=f(x^2)$ este valabilă formula

$$\frac{d^n y}{dx^n}=(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+\ldots$$

1231. *Polinoamele lui Cebîşev-Hermite* se definesc cu ajutorul formulei

$$H_m(x)=(-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)} \qquad (m=0, 1, 2, \ldots).$$

Să se afle expresia explicită a polinoamelor $H_m(x)$.

Să se demonstreze că $H_m(x)$ satisface ecuaţia

$$H''_m(x)-2xH'_m(x)+2mH_m(x)=0.$$

I n d i c a ţ i e. Se va folosi egalitatea $u'+2xu=0$, unde $u=e^{-x^2}$.

1232. Să se demonstreze egalitatea

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

I n d i c a ţ i e. Se va folosi metoda inducţiei complete.

1233. Să presupunem că $\frac{d}{dx}=D$ înseamnă operaţia de derivare şi că

$$f(D)=\sum_{k=0}^{n} p_k(x)D^k$$

este un polinom diferenţial simbolic, unde $p_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ sînt funcţii arbitrare continue de x.

Să se demonstreze că

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

unde λ este o constantă.

1234. Să se demonstreze că dacă în ecuaţia

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k}=0$$

punem

$$x=e^t,$$

unde t este o variabilă independentă, această ecuaţie devine

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\ldots(D-k+1)y=0,$$

unde $D=\frac{d}{dt}$.

§ 6. Teoremele lui Rolle, Lagrange şi Cauchy

1°. T e o r e m a l u i R o l l e. Dacă: 1) funcţia $f(x)$ este definită şi continuă pe segmentul $[a, b]$; 2) $f(x)$ are o derivată finită $f'(x)$ în interiorul acestui segment; 3) $f(a)=f(b)$, atunci există cel puţin un număr c aparţinînd intervalului (a, b), astfel încît

$$f'(c)=0.$$

2°. T e o r e m a l u i L a g r a n g e. Dacă: 1) funcţia $f(x)$ este definită şi continuă pe segmentul $[a, b]$; 2) $f(x)$ are o derivată finită $f'(x)$ în intervalul (a, b), atunci

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c), \quad \text{unde} \quad a<c<b$$

(formula creşterilor finite).

3°. T e o r e m a l u i C a u c h y. Dacă: 1) funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sînt definite şi continue pe segmentul $[a, b]$; 2) $f(x)$ şi $g(x)$ au derivate finite $f'(x)$

şi $g'(x)$ în intervalul (a, b); 3) $f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0$ pentru $a<x<b$; 4) $g(a)\neq g(b)$ atunci

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{unde} \quad a<c<b.$$

1235. Să se verifice valabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcţia

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3).$$

1236. Funcţia

$$f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$$

se anulează în punctele $x_1=-1$ şi $x_2=1$, dar cu toate acestea $f'(x)\neq 0$ pentru $-1\leqq x\leqq 1$. Să se explice contradicţia aparentă cu teorema lui Rolle.

1237. Să presupunem că funcţia $f(x)$ are o derivată finită $f'(x)$ în fiecare punct al unui interval finit sau infinit (a, b) şi că avem

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x).$$

Să se demonstreze că

$$f'(c)=0,$$

unde c este un anumit punct al intervalului (a, b).

1238. Să presupunem că: 1) funcţia $f(x)$ este definită pe segmentul $[x_0, x_n]$, avînd pe acest segment derivata continuă $f^{(n-1)}(x)$ de ordinul $n-1$; 2) $f(x)$ are o derivată $f^{(n)}(x)$ de ordinul n unică în intervalul (x_0, x_n); 3) sînt satisfăcute egalităţile

$$f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n) \qquad (x_0<x_1<\ldots<x_n).$$

Să se demonstreze că în intervalul (x_0, x_n) există cel puţin un punct ξ, astfel încît

$$f^{(n)}(\xi)=0.$$

1239. Să presupunem că: 1) funcţia $f(x)$ este definită pe segmentul $[a, b]$, avînd pe acest segment derivata continuă $f^{(p+q)}(x)$ de ordinul $p+q$; 2) $f(x)$ are o derivată $f^{(p+q+1)}(x)$ de ordinul $p+q+1$, unică în intervalul (a, b); 3) sînt satisfăcute egalităţile

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(p)}(a)=0$$

şi

$$f(b)=f'(b)=\ldots=f^{(q)}(b)=0.$$

Să se demonstreze că în acest caz

$$f^{(p+q+1)}(c)=0,$$

unde c este un anumit punct al intervalului (a, b).

1240. Să se demonstreze că dacă toate rădăcinile polinomului

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (a_0\neq 0)$$

cu coeficienţi reali a_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ sînt reale, atunci derivatele sale succesive $P'_n(x)$, $P''_n(x), \ldots, P_n^{(n-1)}(x)$ au şi ele numai rădăcini reale.

1241. Să se demonstreze că polinomul lui Legendre

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$$

are toate rădăcinile reale, ele fiind cuprinse în intervalul $(-1, 1)$.

1242. Să se demonstreze că toate rădăcinile polinomului lui Cebîşev-Laguerre

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

sînt pozitive.

1243. Să se demonstreze că toate rădăcinile polinomului lui Cebîşev-Hermite

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

sînt reale.

1244. Să se determine pe curba $y=x^3$ punctul în care tangenta este paralelă cu coarda care uneşte punctul $A(-1, -1)$ cu $B(2, 8)$.

1245. Este valabilă oare formula creşterilor finite pentru funcţia

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

pe segmentul $[a, b]$, dacă $ab<0$?

1246. Să se găsească funcția $\theta=\theta(x, \Delta x)$ astfel ca

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\theta\Delta x) \qquad (0<\theta<1),$$

dacă:

a) $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$; c) $f(x)=\frac{1}{x}$;

b) $f(x)=x^3$; d) $f(x)=e^x$;

1247. Să se demonstreze că dacă $x\geq 0$, atunci

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

unde

$$\frac{1}{4}\leq\theta(x)\leq\frac{1}{2},$$

iar

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

1248. Fie

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3-x^2}{2} & \text{pentru } 0\leq x\leq 1,\\ \frac{1}{x} & \text{pentru } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Să se determine valoarea intermediară c din formula creșterilor finite pentru funcția $f(x)$ pe segmentul $[0, 2]$.

1249. Fie $f(x)-f(0)=xf'[\xi(x)]$, unde $0<\xi(x)<x$. Să se demonstreze că dacă

$$f(x)=x\sin(\ln x) \quad \text{pentru } x>0 \quad \text{și} \quad f(0)=0,$$

atunci funcția $\xi=\xi(x)$ este discontinuă într-un interval arbitrar de mic $(0, \varepsilon)$, unde $\varepsilon>0$.

1250. Să presupunem că funcția $f(x)$ are o derivată continuă $f'(x)$ în intervalul (a, b). Putem determina oare pentru fiecare punct ξ din (a, b) alte două puncte x_1 și x_2 din acest interval, astfel încît

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi) \qquad (x_1<\xi<x_2)?$$

Să se studieze exemplul: $f(x)=x^3\,(-1\leq x\leq 1)$, unde $\xi=0$.

1251. Să se demonstreze inegalitățile:

a) $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$;

b) $py^{p-1}(x-y)\leq x^p-y^p\leq px^{p-1}(x-y)$, dacă $0<y<x$ și $p>1$;

c) $|\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b|\leq|a-b|$;

d) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$, dacă $0<b<a$.

1252. Să se motiveze de ce nu este valabilă teorema lui Cauchy pentru funcțiile

$$f(x)=x^2 \quad \text{și} \quad g(x)=x^3$$

pe segmentul $[-1, 1]$.

1253. Să presupunem că funcția $f(x)$ este derivabilă pe segmentul $[x_1, x_2]$, iar $x_1x_2>0$. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

unde $x_1<\xi<x_2$.

1254. Să se demonstreze că dacă funcția $f(x)$ este derivabilă, dar nu este mărginită în intervalul finit (a, b), atunci nici derivata lui $f(x)$ nu este mărginită în acest interval. Teorema reciprocă nu este adevărată; să se construiască un exemplu.

1255. Să se demonstreze că dacă funcția $f(x)$ are în intervalul finit sau infinit (a, b) o derivată mărginită $f'(x)$, atunci $f(x)$ este uniform continuă în (a, b).

1256. Să se demonstreze că dacă funcția $f(x)$ este derivabilă în intervalul infinit $(x_0, +\infty)$ și

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0,$$

atunci

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

adică $f(x)=o(x)$ pentru $x\to+\infty$.

1257. Să se demonstreze că dacă funcția $f(x)$ este derivabilă în intervalul infinit $(x_0, +\infty)$ și

$$f(x)=o(x) \quad \text{pentru } x\to+\infty,$$

atunci

$$\lim_{x\to+\infty} |f'(x)|=0.$$

1258. a) Să se demonstreze că dacă: 1) funcţia $f(x)$ este definită şi continuă pe segmentul $[x_0, X]$; 2) $f(x)$ are o derivată finită $f'(x)$ în intervalul (x_0, X); 3) există limita finită sau infinită

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x)=f'(x_0+0),$$

atunci există derivata la dreapta respectiv finită sau infinită $f'_+(x_0)$ şi avem

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0).$$

b) Să se demonstreze că pentru funcţia

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \qquad (x\neq 1) \quad \text{şi} \quad f(1)=0$$

există limita finită

$$\lim_{x\to 1} f'(x),$$

deşi funcţia $f(x)$ nu are derivatele la stînga şi la dreapta $f'_-(1)$ şi $f'_+(1)$.

Să se dea interpretarea geometrică a acestui fapt.

1259. Să se demonstreze că dacă $f'(x)=0$ pentru $a<x<b$, atunci

$$f(x)=\text{const} \quad \text{pentru} \quad a<x<b.$$

1260. Să se demonstreze că funcţia liniară

$$f(x)=kx+b$$

este singura funcţie $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ care are o derivată constantă

$$f'(x)=k.$$

1261. Ce se poate spune despre funcţia $f(x)$, dacă

$$f^{(n)}(x)=0\,?$$

1262. Să se demonstreze că funcţia exponenţială

$$y=Ce^{\lambda x},$$

unde C este o constantă arbitrară, este singura funcţie $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ care satisface ecuaţia

$$y'=\lambda y \qquad (\lambda=\text{const}).$$

Indicaţie. Se va considera $(ye^{-\lambda x})'$.

1263. Să se verifice că funcţiile

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+a}{1-ax} \qquad (a\neq 0)$$

şi

$$g(x)=\operatorname{arctg} x$$

au aceleaşi derivate în domeniile:

$$1)\ ax<1 \quad \text{şi} \quad 2)\ ax>1.$$

Să se deducă relaţia care există între aceste funcţii.

1264. Să se demonstreze identităţile:

a) $2\operatorname{arctg} x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi \operatorname{sgn} x$ pentru $|x|\geq 1$;

b) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$ pentru $|x|\leq\frac{1}{2}$.

1265. Să se demonstreze că dacă: 1) funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, b]$; 2) are derivata finită $f'(x)$ în interiorul său; 3) nu este liniară, atunci în intervalul (a, b) există cel puţin un punct c, astfel încît

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

Să se dea interpretarea geometrică a acestui fapt.

1266. Să se demonstreze că dacă: 1) funcţia $f(x)$ este de două ori derivabilă în intervalul (a, b) şi 2) $f'(a)=f'(b)=0$, atunci în intervalul (a, b) există cel puţin un punct c astfel ca

$$|f''(c)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

1267. Un automobil care porneşte dintr-un anumit punct iniţial, termină drumul său în t s, parcurgînd o distanţă de s m. Să se demonstreze că la un moment dat valoarea absolută a acceleraţiei mişcării automobilului a fost de cel puţin

$$\frac{4s}{t^2}\ \text{m/s}^2.$$

§ 7. Creşterea şi descreşterea unei funcţii. Inegalităţi

1°. Creşterea şi descreşterea unei funcţii. Vom spune că funcţia $f(x)$ este *crescătoare* (*descrescătoare*) pe segmentul $[a, b]$ dacă

$$f(x_2) > f(x_1) \quad \text{pentru} \quad a \leq x_1 < x_2 \leq b$$

(sau respectiv $f(x_2) < f(x_1)$ pentru $a \leq x_1 < x_2 \leq b$).

Dacă funcţia derivabilă $f(x)$ este crescătoare (descrescătoare) pe segmentul $[a, b]$, atunci

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{pentru} \quad a \leq x \leq b \text{ (sau } f'(x) \leq 0 \quad \text{pentru} \quad a \leq x \leq b).$$

2°. Criteriul suficient pentru recunoaşterea creşterii (descreşterii) unei funcţii. Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, b]$ şi are în interiorul acestui segment derivata $f'(x)$ pozitivă (negativă), funcţia $f(x)$ este crescătoare (descrescătoare) pe $[a, b]$.

Să se determine porţiunile de monotonie strictă (creştere sau descreştere) ale următoarelor funcţii:

1268. $y=2+x-x^2$.

1269. $y=3x-x^3$.

1270. $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

1271. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x \geq 0)$.

1272. $y=x+\sin x$.

1273. $y=x+|\sin 2x|$.

1274. $y=\cos\dfrac{\pi}{x}$.

1275. $y=\dfrac{x^2}{2^x}$.

1276. $y=x^n e^{-x}$ $(n>0,\ x \geq 0)$.

1277. $y=x^2-\ln x^2$.

1278. $f(x)=x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sin \ln x\right)$, dacă $x>0$ şi $f(0)=0$.

1279. Să se demonstreze că mărind numărul laturilor unui poligon regulat cu n laturi înscris într-un cerc, perimetrul său, p_n creşte pe cînd perimetrul P_n al poligonului cu n laturi circumscris aceluiaşi cerc descreşte. Folosind aceasta, să se demonstreze că p_n şi P_n au o limită comună pentru $n \to \infty$.

1280. Să se demonstreze că funcţia

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

este crescătoare în intervalele $(-\infty, -1)$ şi $(0, +\infty)$.

1281. Să se demonstreze că funcţia raţională întreagă

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

este monotonă (în sens strict!) în intervalele $(-\infty, -x_0)$ şi $(x_0, +\infty)$, unde x_0 este un număr pozitiv suficient de mare.

1282. Să se demonstreze că funcţia raţională

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$$

este monotonă (în sens scrict!) în intervalele $(-\infty, -x_0)$ şi $(x_0, +\infty)$, unde x_0 este un număr pozitiv suficient de mare.

1283. Derivata unei funcţii monotone este oare neapărat monotonă?

Să se studieze exemplul: $f(x)=x+\sin x$.

1284. Să se demonstreze că dacă $\varphi(x)$ este o funcţie derivabilă monoton crescătoare şi

$$|f'(x)| \leq \varphi'(x) \quad \text{pentru} \quad x \geq x_0,$$

atunci

$$|f(x)-f(x_0)| \leq \varphi(x)-\varphi(x_0) \quad \text{pentru} \quad x \geq x_0.$$

Să se dea interpretarea geometrică a acestui fapt.

1285. Să presupunem că funcţia $f(x)$ este continuă în intervalul $a \leq x < +\infty$ şi în plus $f'(x) \geq k > 0$ pentru $x > a$, unde k este o constantă.

Să se demonstreze că dacă $f(a) < 0$, ecuaţia $f(x)=0$ are o rădăcină reală în intervalul

$$\left(a,\ a+\frac{f(a)}{k}\right).$$

1286. Vom spune că funcţia $f(x)$ este *crescătoare în punctul* x_0, dacă într-o anumită vecinătate $(x-x_0)<\delta$ semnul creşterii funcţiei $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ coincide cu semnul creşterii variabilei $\Delta x_0=x-x_0$.

Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ $(a<x<b)$ este crescătoare în fiecare punct al unui interval (a, b) finit sau infinit, ea este crescătoare în acest interval.

1287. Să se arate că funcţia

$$f(x)=x+x^2\sin\frac{1}{x}, \quad \text{dacă} \quad x \neq 0 \quad \text{şi} \quad f(0)=0,$$

este crescătoare în punctul $x=0$, dar nu este crescătoare în nici un interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$, care conţine acest punct, unde $\varepsilon>0$ este un număr arbitrar de mic.

Să se schiţeze graficul funcţiei.

1288. Să se demonstreze teorema: dacă 1) funcţiile $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ sînt de n ori derivabile; 2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0, 1,\ldots,n-1)$; 3) $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$ pentru $x>x_0$, atunci are loc inegalitatea

$$\varphi(x)>\psi(x) \quad \text{pentru} \quad x>x_0.$$

1289. Să se demonstreze următoarele inegalităţi:

a) $e^x>1+x$ pentru $x\neq 0$;

b) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$ pentru $x>0$;

c) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x$ pentru $x\neq 0$;

d) $\operatorname{tg} x>x+\frac{x^3}{3}$ pentru $0<x<\frac{\pi}{2}$;

e) $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ pentru $x>0$, $y>0$ şi $0<\alpha<\beta$.

Să se dea interpretarea geometrică a inegalităţilor a)—e).

1290. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x \quad \text{pentru} \quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

1291. Să se demonstreze că pentru $x>0$ are loc inegalitatea

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. Să presupunem că o progresie aritmetică şi o progresie geometrică au acelaşi număr de termeni, că primii şi ultimii termeni coincid respectiv şi că în plus toţi termenii celor două progresii sînt pozitivi. Să se demonstreze că suma termenilor progresiei aritmetice este mai mare decît suma termenilor progresiei geometrice.

1293. Plecînd de la inegalitatea

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2\geq 0,$$

unde x, a_k, b_k $(k=1,\ldots,n)$ sînt reali, să se demonstreze *inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\leq\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

1294. Să se demonstreze că media aritmetică a unor numere pozitive este cel mult egală cu media pătratică a aceloraşi numere, adică

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leq\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

1295. Să se demonstreze că media geometrică a unor numere pozitive este cel mult egală cu media aritmetică a aceloraşi numere, adică

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\leq\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

Indicaţie. Se va aplica metoda inducţiei complete.

1296. Numim *medie de ordinul* s a două numere pozitive a şi b, funcţia definită de egalitatea

$$\Delta_s(a, b)=\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \quad \text{dacă} \quad s\neq 0,$$

şi

$$\Delta_0(a, b)=\lim_{s\to 0}\Delta_s(a, b).$$

In particular, obţinem: pentru $s=-1$ *media armonică*; pentru $s=0$ *media geometrică* (să se demonstreze!); pentru $s=1$ *media aritmetică*; pentru $s=2$ *media pătratică*.

Să se demonstreze că:

1) $\min(a, b)\leq\Delta_s(a, b)\leq\max(a, b)$;

2) funcţia $\Delta_s(a, b)$ pentru $a\neq b$ este funcţie crescătoare de variabila s;

3) $\lim\limits_{s\to-\infty}\Delta_s(a, b)=\min(a, b)$;

$\lim\limits_{s\to+\infty}\Delta_s(a, b)=\max(a, b)$.

Indicaţie. Se consideră

$$\frac{d}{ds}[\ln\Delta_s(a, b)].$$

1297. Fie $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ o funcţie de două ori derivabilă şi

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty \qquad (k=0, 1, 2).$$

Să se demonstreze inegalitatea

$$M_1^2 \leqq 2M_0M_2.$$

Indicație. Se consideră funcția

$$F(x)=f'^2(x)-2M_2f(x).$$

§ 8. Concavitatea unei curbe. Puncte de inflexiune

1°. Condiții suficiente pentru recunoașterea concavității. Zicem că graficul unei funcții derivabile $y=f(x)$ este *concav în sus (concav în jos)* pe segmentul $[a, b]$, dacă arcul de curbă

$$y=f(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

este situat deasupra (respectiv dedesubtul) tangentei dusă într-un punct oarecare al lui. Condiția suficientă pentru ca o curbă să aibă concavitatea în sus (în jos), în ipoteza că există derivata de ordinul al doilea $f''(x)$, este dată de inegalitatea

$$f''(x)>0 \quad (f''(x)<0) \quad \text{pentru} \quad a<x<b.$$

2°. Condiția suficientă pentru a avea un punct de inflexiune. Punctele în care se schimbă orientarea concavității graficului funcției se numesc *puncte de inflexiune*. Punctul x_0, în care $f''(x_0)=0$ sau $f''(x_0)$ nu este definită, este un punct de inflexiune dacă $f''(x)$ își schimbă semnul trecînd prin punctul x_0.

1298. Să se studieze orientarea concavității curbei

$$y=1+\sqrt[3]{x}$$

în punctele $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ și $C(0, 0)$.

Să se determine punctele de inflexiune ale graficelor funcțiilor de mai jos, punînd în evidență porțiunile pentru care concavitatea are aceeași orientare:

1299. $y=3x^2-x^3$.

1300. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

1301. $y=x+x^{\frac{5}{3}}$.

1302. $y=\sqrt{1+x^2}$.

1303. $y=x+\sin x$.

1304. $y=e^{-x^2}$.

1305. $y=\ln(1+x^2)$.

1306. $y=x\sin(\ln x)$ $(x>0)$.

1307. $y=x^x$ $(x>0)$.

1308. Să se arate că curba

$$y=\frac{x+1}{x^2+1}$$

are trei puncte de inflexiune situate pe o aceeași dreaptă.

Să se construiască graficul acestei funcții.

1309. Pentru ce valoare a parametrului h are curba din teoria probabilităților,

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \qquad (h>0)$$

un punct de inflexiune în $x=\pm\sigma$?

1310. Să se studieze cum este orientată concavitatea cicloidei

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \quad (a>0).$$

1311. Fie funcția $f(x)$ de două ori derivabilă în intervalul

$$a \leqq x<+\infty, \text{ iar: } 1)\ f(a)=A>0;\ \ 2)\ f'(a)<0;\ \ 3)\ f''(x) \leqq 0$$

pentru $x>a$.

Să se demonstreze că ecuația $f(x)=0$ are o rădăcină reală și numai una în intervalul $(a, +\infty)$.

1312. Vom spune că funcția $f(x)$ este *convexă în jos (în sus)* în intervalul (a, b), dacă pentru orice pereche de puncte x_1 și x_2 din acest interval și pentru orice pereche de numere λ_1 și λ_2 $(\lambda_1>0, \lambda_2>0, \lambda_1+\lambda_2=1)$ este satisfăcută inegalitatea

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$

[respectiv inegalitatea inversă

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)].$$

Să se demonstreze că: 1) funcția $f(x)$ este convexă în jos în (a, b), dacă $f''(x)>0$ pentru $a<x<b$; $f(x)$ este convexă în sus în (a, b), dacă $f''(x)<0$ pentru $a<x<b$.

1313. Să se arate că funcțiile

$$x^n\ (n>1),\ e^x,\ x\ln x$$

sînt convexe în jos în intervalul $(0, +\infty)$, iar funcțiile

$$x^n\ (0<n<1),\ \ln x$$

sînt convexe în sus în intervalul $(0, +\infty)$.

1314. Să se demonstreze inegalitățile și să se dea interpretarea lor geometrică:

a) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ $(x>0,\ y>0,\ x\neq y,\ n>1)$;

b) $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x\neq y)$;

c) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$, dacă $x>0$ și $y>0$.

1315. Să se demonstreze că o funcţie mărginită şi convexă este peste tot continuă şi are derivată la stînga şi derivată la dreapta.

1316. Fie o funcţie $f(x)$ de două ori derivabilă în intervalul (a, b) şi $f''(\xi)\neq 0$, unde $a<\xi<b$.

Să se demonstreze că în intervalul (a, b) există două puncte x_1 şi x_2, care se bucură de proprietatea că

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

1317. Să se demonstreze că dacă o funcţie $f(x)$ este de două ori derivabilă în intervalul infinit $(x_0, +\infty)$ şi

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

atunci în intervalul $(x_0, +\infty)$ există cel puţin un punct ξ astfel încît $f''(\xi)=0$.

§ 9. Ridicarea nedeterminărilor

Prima regulă a lui l'Hospital $\left(\text{ridicarea nedeterminării de forma } \frac{0}{0}\right)$. Dacă: 1) funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sînt definite şi continue într-o anumită vecinătate U_ε[1]) a punctului a, a fiind un număr sau simbolul ∞, şi ambele funcţii tind pentru $x\to a$ către zero:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0;$$

2) derivatele $f'(x)$ şi $g'(x)$ există în vecinătatea U_ε a punctului a, exceptînd poate punctul a însuşi, şi nu se anulează simultan pentru $x\neq a$; 3) există limita finită sau infinită

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

atunci avem:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

---

[1]) Prin vecinătatea U_ε a punctului se înţelege mulţimea numerelor x care satisfac inegalitatea: 1) $|x-a|<\varepsilon$, dacă a este un număr, şi 2) $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$ dacă a este simbolul ∞.

A doua regulă a lui l'Hospital $\left(\text{ridicarea nedeterminării de forma } \frac{\infty}{\infty}\right)$. Dacă: 1) funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ tind către infinit pentru $x\to a$, adică

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$$

a fiind un număr sau simbolul ∞; 2) derivatele $f'(x)$ şi $g'(x)$ există pentru orice x aparţinînd unei vecinătăţi U_ε a punctului a şi fiind diferit de a, iar

$$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0 \quad \text{pentru} \quad x\subset U_\varepsilon \quad \text{şi} \quad x\neq a;$$

3) există limita finită sau infinită

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

atunci

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ridicarea nedeterminărilor de forma $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0 etc. se face aducînd nedeterminările date, prin intermediul unor calcule algebrice, la ridicarea nedeterminărilor de primele două forme:

$$\frac{0}{0} \quad \text{şi} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Să se calculeze valorile următoarelor expresii.

1318. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$.

1319. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$.

1321. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg} 4x-12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

1322. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

1323. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{ctg} x-1}{x^2}$.

1324. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$

1325. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

1327. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

1328. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{b}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{x}{b}}\right)$.

1329. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$.

1330. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$.

1331. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

1332. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

1334. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\mathrm{th}\,x}-\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}\right)$.

1335. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{ar\,sh}(\mathrm{sh}\,x)-\mathrm{ar\,sh}(\sin x)}{\mathrm{sh}\,x-\sin x}$,

unde $\mathrm{ar\,sh}\,x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1336. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$ $(\varepsilon>0)$.

1337. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,\ n>0)$.

1338. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0,01x}$.

1340. $\lim\limits_{x\to1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x$ $(\varepsilon>0)$.

1342. $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

1343. $\lim\limits_{x\to0}x^{x^x-1}$

1344. $\lim\limits_{x\to0}(x^{x^x}-1)$.

1345. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{k}{1+\ln x}}$.

1346. $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

1347. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

1348. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{tg}\,2x}$.

1349. $\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{ctg}\,x)^{\sin x}$.

1350. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

1351. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1352. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}\,a}\right)^{\mathrm{ctg}(x-a)}$.

1353. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1354. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

1355. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

1356. $\lim\limits_{x\to0}\left(\mathrm{ctg}\,x-\frac{1}{x}\right)$.

1357. $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

1358. $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

1359. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

1360. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$.

1361. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,x\right)^x$.

1362. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{th}\,x)^x$.

1363. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1364. $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

1365. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$.

1366. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1367. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\mathrm{ch}\,x}{\sqrt[m]{\mathrm{ch}\,x}-\sqrt[n]{\mathrm{ch}\,x}}$.

1368. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\mathrm{cth}\,x}$.

1369. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

1370. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

1371. Să se calculeze

$$\lim_{x\to0}\frac{y}{x},$$

dacă curba $y=f(x)$ trece pentru $x\to0$ prin originea $(0,\ 0)$ $(f(0)=0)$ sub unghiul α.

1372. Să se demonstreze că

$$\lim_{x\to+0}x^{f(x)}=1,$$

dacă curba $y=f(x)$ trece pentru $x\to+0$ prin originea $(0,\ 0)$ $(f(0)=0)$, rămînînd pentru $0<x<\varepsilon$ în întregime în interiorul unghiului ascuţit format de dreptele $y=-kx$ şi $y=kx$ $(k\neq\infty)$.

1373. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ are derivata de ordinul al doilea $f''(x)$, atunci

$$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

1374. Să se studieze dacă este posibilă aplicarea regulii lui l'Hospital la următoarele exemple:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\,e^{\sin x}}$.

1375. Să se determine limita raportului dintre aria segmentului circular, de coardă b şi săgeată h, şi aria triunghiului isoscel înscris în acest segment, dacă raza R rămînînd fixă arcul segmentului tinde către zero. Folosind rezultatele obţinute, să se deducă formula aproximativă pentru aria segmentului:

$$S\approx\frac{2}{3}bh.$$

§ 10. Formula lui Taylor

1°. Formula locală a lui Taylor. 1) funcţia $f(x)$ este definită într-o anumită vecinătate $|x-x_0|<\varepsilon$ a punctului x_0; 2) $f(x)$ are în această vecinătate derivatele $f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)$ pînă la ordinul $(n-1)$ inclusiv; 3) în punctul x_0 există derivata de ordinul n, $f^{(n)}(x_0)$, atunci

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k+o(|x-x_0|^n), \tag{1}$$

unde

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

In particular, pentru $x_0=0$ avem:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(|x|^n). \tag{2}$$

In aceste condiţii reprezentarea (1) este unică.

Din formula locală a lui Taylor (2) obţinem următoarele cinci dezvoltări importante:

I. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

II. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$.

III. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$.

IV. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$

$\ldots+\dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

V. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

2°. Formula lui Taylor. Dacă: 1) funcţia $f(x)$ este definită pe segmentul $[a, b]$; 2) $f(x)$ are pe acest segment derivate continue $f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)$; 3) pentru $a<x<b$ există derivata finită $f^{(n)}(x)$, atunci

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\qquad (a\le x\le b),$$

unde

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n\qquad (0<\theta<1)$$

(restul lui Lagrange), sau

$$R_n(x)\frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n\qquad (0<\theta_1<1)$$

(restul lui Cauchy).

1376. Să se dezvolte polinomul

$$P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$$

după puterile pozitive întregi ale binomului $x+1$.

Să se scrie dezvoltările după puterile întregi şi pozitive ale variabilei x, mergînd pînă la termenii de ordinul arătat mai jos, pentru următoarele funcţii:

1377. $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ pînă la termenul x^4. Cu ce este egal $f^{(4)}(0)$?

1378. $\dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ pînă la termenul x^2.

1379. $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$ pînă la termenul x^2.

1380. $\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ pînă la termenul x^3.

1381. e^{2x-x^2} pînă la termenul x^5.

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ pînă la termenul x^4.

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ pînă la termenul x^{13}.

1384. $\ln \cos x$ pînă la termenul x^6.

1385. $\sin (\sin x)$ pînă la termenul x^3.

1386. $\operatorname{tg} x$ pînă la termenul x^5.

1387. $\ln \frac{\sin x}{x}$ pînă la termenul x^6.

1388. Să se calculeze primii trei termeni ai dezvoltării funcţiei $f(x)=\sqrt{x}$ după puterile întregi şi pozitive ale diferenţei $x-1$.

1389. Să se dezvolte funcţia $f(x)=x^x-1$ după puterile întregi şi pozitive ale binomului $x-1$ pînă la termenul $(x-1)^3$ inclusiv.

1390. Să se aproximeze în vecinătatea punctului $x=0$ funcţia $y=a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(a>0)$ printr-o parabolă de gradul al doilea.

1391. Să se dezvolte funcţia $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x$ $(x>0)$ după puterile întregi şi pozitive ale fracţiei $\frac{1}{x}$ pînă la termenul $\frac{1}{x^3}$ inclusiv.

1392. Să se găsească dezvoltarea funcţiei $f(h)=\ln(x+h)$ $(x>0)$ după puterile întregi şi pozitive ale creşterii h pînă la termenul în h^n (n fiind un număr natural).

1393. Fie

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

$(0<\theta<1)$, iar $f^{(n+1)}(x)\neq 0$.

Să se demonstreze că

$$\lim_{h\to 0} \theta=\frac{1}{n+1}.$$

1394. Să se evalueze eroarea absolută a formulelor aproximative:

a) $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ pentru $0\leq x\leq 1$;

b) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$ pentru $|x|\leq\frac{1}{2}$;

c) $\operatorname{tg} x\approx x+\frac{x^3}{3}$ pentru $|x|\leq 0,1$;

d) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ pentru $0\leq x\leq 1$.

1395. Pentru ce valori ale lui x este valabilă, cu aproximaţie de 0,000 1, următoarea formulă aproximativă:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}?$$

1396. Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Taylor valorile aproximative:

a) $\sqrt[3]{30}$; d) $\sqrt{e}$; g) $\operatorname{arctg} 0,8$;

b) $\sqrt[5]{250}$; e) $\sin 18°$; h) $\arcsin 0,45$;

c) $\sqrt[12]{4000}$; f) $\ln 1,2$; i) $(1,1)^{1,2}$

şi să se evalueze eroarea făcută.

1397. Să se calculeze:

a) e cu 9 zecimale exacte; d) $\sqrt{5}$ cu 4 zecimale exacte;

b) $\sin 1°$ cu 8 zecimale exacte; e) $\lg 11$ cu 5 zecimale exacte.

c) $\cos 9°$ cu 5 zecimale exacte;

Folosind dezvoltările I—V, să se calculeze următoarele limite:

1398. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

1399. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

1400. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

1401. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$.

1402. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

1403. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$.

1404. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

1405. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$. **1406.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$.

Să se determine partea principală de forma Cx^n (C este constant) a infiniţilor mici y pentru $x\to 0$, dacă:

1407. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)$.

1408. $y=(1+x)^x-1$.

1409. $y=1-\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$.

1410. Pentru ce valori ale coeficienţilor a şi b mărimea

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

este un infinit mic de ordinul cinci în raport cu x?

1411. Considerînd că $|x|$ este o mărime mică, să se deducă formule aproximative simple pentru următoarele expresii:

a) $\dfrac{1}{R^2}-\dfrac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$; c) $\dfrac{A}{x}\left[1-\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^{-n}\right]$;

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$; d) $\dfrac{\ln 2}{\ln\left(1+\dfrac{x}{100}\right)}$.

1412. Considerînd x mic în valoare absolută, să se deducă formula

$$x=\alpha\sin x+\beta\operatorname{tg} x$$

cu aproximaţia pînă la termenii care încep cu x^5.

Să se aplice această formulă pentru rectificarea, cu aproximaţie, a arcelor de deschidere mică.

1413. Să se evalueze eroarea relativă pe care o introduce următoarea *regulă a lui Cebîşev:* arcul de cerc este aproximativ egal cu suma celor două laturi egale ale triunghiului isoscel, avînd drept bază coarda acestui arc şi înălţimea egală cu $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ din săgeata sa.

§ 11. Extremumul unei funcţii. Valorile maxime şi minime ale unei funcţii

1°. C o n d i ţ i a n e c e s a r ă d e e x i s t e n ţ ă a u n u i e x t r e m u m. Se spune că funcţia $f(x)$ are în punctul x_0 un extremum (*maxim* sau *minim*) dacă funcţia este definită într-o vecinătate bilaterală a punctului x_0 şi dacă pentru toate punctele x ale unui anumit domeniu $0<|x-x_0|<\delta$ este satisfăcută inegalitatea

$$f(x)<f(x_0) \quad \text{sau} \quad f(x)>f(x_0).$$

Intr-un punct în care avem un extremum, derivata $f'(x_0)=0$, dacă aceasta există.

2°. C o n d i ţ i i l e s u f i c i e n t e p e n t r u c a î n t r-u n p u n c t d a t s ă e x i s t e u n e x t r e m u m. *Prima regulă.* Dacă: 1) funcţia $f(x)$ este definită şi continuă într-o anumită vecinătate $|x-x_0|<\delta$ a punctului x_0 astfel încît $f'(x_0)=0$ sau nu există (*punct critic*); 2) $f(x)$ are derivata finită $f'(x)$ în domeniul $0<|x-x_0|<\delta$; 3) derivata $f'(x)$ păstrează un anumit semn la stînga lui x_0 şi la dreapta lui x_0, atunci comportarea funcţiei $f(x)$ este caracterizată de următoarea tabelă:

	Semnul derivatei		Concluzia
	$x<x_0$	$x>x_0$	
I	+	+	nu există extremum
II	+	−	maxim
III	−	+	minim
IV	−	−	nu există extremum

A doua regulă. Dacă funcţia $f(x)$ are o derivată de ordinul al doilea $f''(x)$ şi într-un anumit punct x_0 sînt satisfăcute condiţiile

$$f'(x_0)=0 \quad \text{şi} \quad f''(x_0)\neq 0,$$

atunci funcţia $f(x)$ are în acest punct un *extremum* şi anume: un *maxim* dacă $f''(x_0)<0$ şi un *minim* dacă $f''(x_0)>0$.

A treia regulă. Să presupunem că funcţia $f(x)$ are într-un anumit interval $|x-x_0|<\delta$ derivatele $f'(x),\ldots,f^{(n-1)}(x)$, iar în punctul x_0 are derivata $f^{(n)}(x_0)$, şi că

$$f^{(k)}(x_0)=0 \quad (k=1,\ldots,n-1), \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

In cazul acesta: 1) dacă n este un număr par, funcţia $f(x)$ are în punctul x_0 un *extremum*, şi anume: un *maxim* pentru $f^{(n)}(x_0)<0$ şi un *minim* pentru $f^{(n)}(x_0)>0$; 2) dacă n este un număr impar, atunci funcţia $f(x)$ nu are *extremum* în punctul x_0.

3°. E x t r e m u m u l a b s o l u t. O funcţie continuă $f(x)$ îşi atinge valoarea maximă (minimă) pe segmentul $[a, b]$ sau într-un punct critic al acestei funcţii (adică acolo unde, sau derivata $f'(x)$ este nulă, sau nu există), sau în punctele de frontieră a şi b ale segmentului dat.

Să se studieze valorile maxime şi minime ale următoarelor funcţii:

1414. $y=2+x-x^2$. **1415.** $y=(x-1)^3$.

1416. $y=(x-1)^4$.

1417. $y=x^m(1-x)^n$ (m şi n sînt numere întregi şi pozitive).

1418. $y=\cos x+\operatorname{ch} x$.

1419. $y=(x+1)^{10}e^{-x}$.

1420. $y=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ (n este un număr natural).

1421. $y=|x|$.

1422. $y=x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

1423. Să se studieze valoarea extremă a funcţiei

$$f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x)$$

în punctul $x=x_0$ (n fiind un număr natural), unde funcţia $\varphi(x)$ este continuă pentru $x=x_0$ şi $\varphi(x_0)\neq 0$.

1424. Fie $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x)=\frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ şi x_0 un punct staţionar al funcţiei $f(x)$, adică $P_1(x_0)=0$, $Q(x_0)\neq 0$.

Să se demonstreze că

$$\operatorname{sgn} f''(x_0)=\operatorname{sgn} P_1'(x_0).$$

1425. Putem afirma oare că dacă funcţia $f(x)$ are un maxim în punctul x_0, atunci într-o vecinătate oarecare suficient de mică a acestui punct funcţia $f(x)$ creşte la stînga lui x_0 şi descreşte la dreapta sa?

Să se studieze exemplul:

$$f(x)=2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right),\ \text{dacă}\ x\neq 0\ \text{şi}\ f(0)=2.$$

1426. Să se demonstreze că funcţia

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}},\ \text{dacă}\ x\neq 0\ \text{şi}\ f(0)=0,$$

are în punctul $x=0$ un minim, deşi

$$f^{(n)}(0)=0\quad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Să se construiască graficul acestei funcţii.

1427. Să se studieze valorile extreme ale funcţiilor:

a) $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right)$ pentru $x\neq 0$ şi $f(0)=0$;

b) $f(x)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\cos\frac{1}{x}\right)$ pentru $x\neq 0$ şi $f(0)=0$.

Să se construiască graficele acestor funcţii.

1428. Să se studieze extremumul funcţiei

$$f(x)=|x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right),\ \text{dacă}\ x\neq 0\ \text{şi}\ f(0)=0,$$

în punctul $x=0$.

Să se construiască graficul acestei funcţii.

Să se determine valorile extreme ale următoarelor funcţii:

1429. $y=x^3-6x^2+9x-4$.

1430. $y=2x^2-x^4$.

1431. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$.

1432. $y=x+\frac{1}{x}$.

1433. $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

1434. $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

1435. $y=\sqrt{2x-x^2}$.

1436. $y=x\sqrt[3]{x-1}$.

1437. $y=xe^{-x}$.

1438. $y=\sqrt{x}\ln x$.

1439. $y=\frac{\ln^2 x}{x}$.

1440. $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$.

1441. $y=\frac{10}{1+\sin^2 x}$.

1442. $y=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1443. $y=e^x\sin x$.

1444. $y=|x|e^{-|x-1|}$.

Să se determine valorile maxime şi minime ale următoarelor funcţii:

1445. $f(x)=2^x$ pe segmentul $[-1;\ 5]$.

1446. $f(x)=x^2-4x+6$ pe segmentul $[-3;\ 10]$.

1447. $f(x)=|x^2-3x+2|$ pe segmentul $[-10;\ 10]$.

1448. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ pe segmentul $[0,01;\ 100]$.

1449. $f(x)=\sqrt{5-4x}$ pe segmentul $[-1;\ 1]$.

Să se determine marginea inferioară (inf) şi marginea superioară (sup) a următoarelor funcţii:

1450. $f(x)=xe^{-0{,}01x}$ în intervalul $(0, +\infty)$.

1451. $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ în intervalul $(0, +\infty)$.

1452. $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ în intervalul $(0, +\infty)$.

1453. $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$ în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

1454. Să se determine marginea inferioară şi marginea superioară a funcţiei $f(\xi)=\frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ în intervalul $x<\xi<+\infty$.

Să se construiască graficele funcţiilor

$$m(x)=\inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi)$$

şi

$$M(x)=\sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

1455. Să se determine termenul maxim al şirului:

a) $\frac{n^{10}}{2^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$;

b) $\frac{\sqrt{n}}{n+10\,000}$ $(n=1, 2, \ldots)$;

c) $\sqrt[n]{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$.

1456. Să se demonstreze inegalităţile:

a) $|3x-x^3|\leqq 2$ pentru $|x|\leqq 2$;

b) $\frac{1}{2^{p-1}}\leqq x^p+(1-x)^p\leqq 1$, dacă $0\leqq x\leqq 1$ şi $p>1$;

c) $x^m(a-x)^n\leqq\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$ pentru $m>0$, $n>0$ şi $0\leqq x\leqq a$;

d) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqq\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqq x+a$ $(x>0,\ a>0,\ n>1)$;

e) $|a\sin x+b\cos x|\leqq\sqrt{a^2+b^2}$.

1457. Să se determine „abaterea de la zero" a polinomului

$$P(x)=x(x-1)^2(x+2)$$

pe segmentul $[-2, 1]$, adică să se găsească

$$E_p=\sup_{-2\leqq x\leqq 1}|P(x)|.$$

1458. Pentru ce valoare a coeficientului q se abate polinomul

$$P(x)=x^2+q$$

cel mai puţin de la zero, pe segmentul $[-1, 1]$, adică

$$E_p=\sup_{-1\leqq x\leqq 1}|P(x)|=\min.$$

1459. Numim *abatere absolută* a două funcţii $f(x)$ şi $g(x)$ pe segmentul $[a, b]$ numărul

$$\Delta=\sup_{a\leqq x\leqq b}|f(x)-g(x)|.$$

Să se determine abaterea absolută a funcţiilor

$$f(x)=x^2 \quad\text{şi}\quad g(x)=x^3$$

pe segmentul $[0, 1]$.

1460. Să se înlocuiască pe segmentul $[x_1, x_2]$ funcţia

$$f(x)=x^2$$

prin funcţia liniară

$$g(x)=(x_1+x_2)x+b,$$

astfel încît abaterea absolută a funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ (v. problema precedentă) să fie minimă şi să se afle această abatere absolută minimă.

1461. Să se determine minimul funcţiei

$$f(x)=\max\{2|x|, |1+x|\}.$$

Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei şi să se separe aceste rădăcini dacă:

1462. $x^3-6x^2+9x-10=0$.

1463. $x^3-3x^2-9x+h=0$.

1464. $3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$.

1465. $x^5-5x=a$.

1466. $\ln x=kx$.

1467. $e^x=ax^2$ $(a>0)$.

1468. $\sin^3 x\cdot\cos x=a$ pentru $0\leqq x\leqq\pi$.

1469. $\operatorname{ch} x=kx$.

1470. In ce condiţii are ecuaţia

$$x^3+px+q=0$$

a) o rădăcină reală; b) trei rădăcini reale. Să se reprezinte domeniile respective în planul (p, q).

§ 12. Construcţia graficelor funcţiilor cu ajutorul punctelor lor caracteristice

Pentru construirea graficului unei funcţii $y=f(x)$ este necesar: 1) să se determine domeniul de existenţă al acestei funcţii şi să se studieze comportarea funcţiei în punctele frontieră ale acestui domeniu; 2) să se vadă dacă graficul funcţiei prezintă vreo simetrie sau dacă funcţia este periodică; 3) să se afle punctele de discontinuitate ale funcţiei şi intervalele unde funcţia este continuă; 4) să se determine zerourile funcţiei şi domeniile în care funcţia păstrează un semn constant; 5) să se determine punctele în care funcţia devine maximă sau minimă şi porţiunile de creştere şi de descreştere ale funcţiei; 6) să se afle punctele de inflexiune şi să se stabilească porţiunile în care graficul funcţiei este concav în sus sau în jos; 7) să se afle asimptotele dacă acestea există; 8) să se indice diferitele particularităţi ale graficului.

In problemele marcate cu o steluţă, punctele de inflexiune se vor determina cu aproximaţie.

Să se construiască graficele următoarelor funcţii:

1471. $y=3x-x^3$.

1472. $y=1+x^2-\frac{x^4}{2}$.

1473. $y=(x+1)(x-2)^2$.

1474*. $y=\frac{2-x^2}{1+x^4}$.

1475*. $y=\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$.

1476*. $y=\frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

1477. $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$.

1478. $y=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

1479. $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.

1480. $y=\frac{x}{(1-x^2)^2}$.

1481. $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

1482*. $y=\frac{x^4+8}{x^3+1}$.

1483. $y=\frac{1}{1+x}-\frac{10}{3x^2}+\frac{1}{1-x}$.

1484. $y=(x-3)\sqrt{x}$.

1485. $y=\pm\sqrt{8x^2-x^4}$.

1486. $y=\pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1487*. $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$.

1488. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$,

1489. $y=(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

1490. $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$.

1491. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

1492. $y=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

1493. $y=\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$.

1494. $y=1-x+\sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

1495. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

1496*. $y=\sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}}$.

1497. $y=\sin x+\cos^2 x$.

1498. $y=(7+2\cos x)\sin x$.

1499. $y=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$.

1500. $y=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x$.

1501. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

1502. $y=\sin x\cdot\sin 3x$.

1503. $y=\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

1504. $y=\frac{\cos x}{\cos 2x}$.

1505. $y=2x-\operatorname{tg} x$.

1506. $y=e^{2x-x^2}$.

1507. $y=(1+x^2)e^{-x^2}$.

1508. $y=x+e^{-x}$.

1509. $y=x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

1510. $y=\frac{e^x}{1+x}$.

1511. $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1512. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1513. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1514. $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

1515. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1516. $y=x+\operatorname{arctg} x$.

1517. $y=\frac{x}{2}+\operatorname{arctg} x$.

1518. $y=x\operatorname{arctg} x$.

1519. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

1520. $y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

1521. $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

1522. $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1523*. $y=\ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

1524. $y=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$.

1525. $y=\arccos\frac{1-x}{1-2x}$.

1526. $y=x^x$.

1527. $y=x^{\frac{1}{x}}$.

1528. $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

1529*. $y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$.

1530*. $y=\frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$ (fără a recurge la derivata a doua).

Să se construiască curbele date sub formă parametrică:

1531. $x=\frac{(t+1)^2}{4}$, $y=\frac{(t-1)^2}{4}$.

1532. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

1533. $x=\frac{t^2}{t-1}$, $y=\frac{t}{t^2-1}$.

1534. $x=\frac{t^2}{1-t^2}$, $y=\frac{1}{1+t^2}$.

1535. $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$.

1536. $x=a\cos 2t$, $y=a\cos 3t$ $(a>0)$.

1537. $x=\cos^4 t$, $y=\sin^4 t$.

1538. $x=t\ln t$, $y=\frac{\ln t}{t}$.

1539. $x=\frac{a}{\cos^3 t}$, $y=a\,\mathrm{tg}^3 t$ $(a>0)$.

1540. $x=a(\mathrm{sh}\,t-t)$, $y=a(\mathrm{ch}\,t-1)$ $(a>0)$.

Aducînd ecuațiile curbelor la forma parametrică, să se construiască aceste curbe, dacă:

1541. $x^3+y^3-3axy=0$ $(a>0)$.

Indicație. Se va pune $y=tx$.

1542. $x^2+y^2=x^4+y^4$.

1543. $x^2y^2=x^3-y^3$.

1544. $x^y=y^x$ $(x>0,\ y>0)$.

1545. Să se construiască graficul funcției

$$\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{ch}^2 y=1.$$

Să se construiască graficele funcțiilor date în sistemul de coordonate polare $(\varphi,\ r)$ $(r\geq 0)$:

1546. $r=a+b\cos\varphi$ $(0<a\leq b)$.

1547. $r=a\sin 3\varphi$ $(a>0)$.

1548. $r=\frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ $(a>0)$.

1549*. $r=a\frac{\mathrm{th}\,\varphi}{\varphi-1}$, unde $\varphi>1$ $(a>0)$.

1550*. $\cos\varphi=\frac{r-1}{r^2}$.

Să se construiască graficele familiilor de curbe (a fiind un parametru variabil):

1551. $y=x^2-2x+a$.

1552. $y=x+\frac{a^2}{x}$.

1553. $y=x\pm\sqrt{a(1-x^2)}$. ?

1554. $y=\frac{x}{2}+e^{-ax}$.

1555. $y=xe^{-\frac{x}{a}}$.

§ 13. Probleme de maxim și minim la funcții

1556. Să se demonstreze că dacă funcția $f(x)$ nu este negativă, funcția

$$F(x)=Cf^2(x)\quad (C>0)$$

are aceleași puncte de maxim și minim ca și funcția $f(x)$.

1557. Să se demonstreze că dacă funcția $\varphi(x)$ este monoton crescătoare pentru $-\infty<x<+\infty$, funcțiile

$$f(x)\quad \text{și}\quad \varphi(f(x))$$

au aceleași puncte de maxim și minim.

1558. Să se determine valoarea maximă a produsului dintre două numere pozitive ridicate respectiv la puterea m și n $(m>0,\ n>0)$, a căror sumă este constantă și egală cu a.

1559. Să se determine valoarea minimă a sumei dintre două numere pozitive ridicate respectiv la puterea m și n $(m>0,\ n>0)$, al căror produs este constant și egal cu a.

1560. In ce sistem de logaritmi există numere egale cu logaritmul lor?

1561. Dintre toate dreptunghiurile de arie dată S să se determine acel dreptunghi al cărui perimetru are lungimea minimă.

1562. Să se determine triunghiul dreptunghic de arie maximă dacă suma dintre o catetă şi ipotenuză este constantă.

1563. Pentru ce dimensiuni liniare va avea un vas cilindric închis, de capacitatea dată V, aria totală minimă?

1564. Intr-un segment circular dat, care nu depăşeşte semicercul, să se înscrie un dreptunghi de arie maximă.

1565. Să se înscrie în elipsa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

un dreptunghi avînd laturile paralele cu axele elipsei şi de arie maximă.

1566. Să se înscrie într-un triunghi de bază b şi înălţime h, un dreptunghi de perimetru maxim.

Să se discute posibilitatea rezolvării acestei probleme.

1567. Dintr-un buştean cilindric de diametru d se ciopleşte o grindă de secţiune dreptunghiulară, avînd baza b şi înălţimea h. Pentru ce dimensiuni va avea grinda rezistenţă maximă dacă rezistenţa ei este proporţională cu bh^2?

1568. Să se înscrie în emisfera de rază R un paralelipiped dreptunghic cu baza un pătrat, de volum maxim.

1569. Să se înscrie în sfera de rază R un cilindru de volum maxim.

1570. Să se înscrie în sfera de rază R un cilindru cu aria totală maximă.

1571. Să se circumscrie unei sfere date un con de volum minim.

1572. Să se determine volumul maxim al conului de generatoarea dată l.

1573. Să se înscrie într-un con circular drept, avînd raza bazei R şi secţiunea axială 2α, un cilindru de arie totală maximă.

1574. Să se determine distanţa minimă dintre punctul $M(p, p)$ şi parabola $y^2=2px$.

1575. Să se determine distanţa minimă şi distanţa maximă dintre punctul $A(2, 0)$ şi cercul $x^2+y^2=1$.

1576. Să se găsească coarda maximă a elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$, care trece prin vîrful $B(0, -b)$.

1577. Să se ducă prin punctul $M(x, y)$ al elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tangenta care să formeze cu axele de coordonate un triunghi de arie minimă.

1578. Un corp este format dintr-un cilindru circular drept, completat în partea de sus cu o emisferă. Pentru ce dimensiuni liniare are acest corp aria totală minimă, în ipoteza că volumul lui este egal cu V.

1579. Secţiunea transversală a unui canal deschis are forma unui trapez isoscel. Pentru ce înclinare φ a laturilor este minim „perimetrul umed" al secţiunii, dacă aria „secţiunii vii" a apei din canal este egală cu S, iar nivelul apei este egal cu h?

1580. Numim *„factor de formă"* al unui contur închis care mărgineşte aria S, raportul dintre perimetrul acestui contur şi lungimea circumferinţei care mărgineşte cercul care are aceeaşi arie S.

Care este forma trapezului isoscel $ABCD\,(AD \parallel BC)$, al cărui factor de formă este minim dacă baza $\overline{AD}=2a$ şi unghiul ascuţit $BAD=\alpha$?

1581. Ce sector trebuie scos din cercul de rază R pentru ca din porţiunea rămasă să putem răsuci o pîlnie de capacitate maximă.

1582. Uzina A este situată la distanţa de a km de la calea ferată, care are direcţia sud-nord şi care trece prin oraşul B. Sub ce unghi φ faţă de calea ferată trebuie construit drumul de acces al uzinei pentru ca transportul încărcăturilor din A în B să fie cel mai economic, dacă costul transportului unei tone de încărcătură pe distanţa de 1 km pe drumul de acces este p ruble, pe calea ferată q ruble $(p>q)$, iar oraşul B este situat cu b km mai la nord de A?

1583. Două vapoare plutesc cu viteze constante u şi v pe linii drepte, formînd un unghi θ între ele. Să se determine distanţa minimă dintre aceste vapoare dacă la un moment dat distanţele lor de la punctul de intersecţie al drumurilor a fost respectiv a şi b.

1584. In punctele A şi B se află surse de lumină de intensitate respectiv S_1 şi S_2 lumînări. Să se găsească pe segmentul $\overline{AB}=a$ punctul M cel mai puţin iluminat.

1585. Un punct luminos se află pe linia centrelor a două sfere de raze R şi $r\,(R>r)$, care nu au puncte comune, fiind situat

în exteriorul acestor sfere. Pentru ce poziție a punctului este maximă suma părților iluminate din suprafețele sferelor?

1586. La ce înălțime deasupra centrului unei mese circulare de rază a trebuie atîrnată o lampă electrică, pentru ca iluminarea marginii mesei să fie maximă?

I n d i c a ț i e. Iluminarea se exprimă prin formula:

$$I=k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

unde φ este unghiul de înclinare al razei, r este distanța sursei de lumină pînă la elementul de suprafață iluminat, k este intensitatea sursei de lumină.

1587. Dintr-un rîu de lățime a m pornește un canal de lățime b m, formînd un unghi drept cu rîul. Care este lungimea maximă a unui vas care poate intra în acest canal?

1588. Cheltuelile diurne pentru plutirea unei nave se compun din două părți: una constantă, egală cu a ruble, și una variabilă, care crește proporțional cu cubul vitezei. Pentru ce viteză v plutirea navei este cea mai economică?

1589. O sarcină de greutate P așezată pe o suprafață orizontală rugoasă trebuie deplasată din loc aplicînd o forță. Pentru ce înclinare a acestei forțe, față de suprafața orizontală, este mărimea ei minimă, dacă coeficientul de frecare al sarcinii este egal cu k?

1590. Intr-o cușcă avînd forma unei emisfere de rază a a fost introdusă o bară de lungime $l>2a$. Să se determine poziția de echilibru a barei.

§ 14. Contactul curbelor. Cerc de curbură. Evolută

1°. C o n t a c t u l d e o r d i n u l n. Se spune că curbele

$$y=\varphi(x) \quad \text{și} \quad y=\psi(x)$$

au în punctul x_0 *un contact de ordinul* n (în sens strict), dacă $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ și $\varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0)$. In acest caz, avem pentru $x\to x_0$:

$$\varphi(x)-\psi(x)=0\,(x-x_0)^{(n+1)}.$$

2°. C e r c u l d e c u r b u r ă. Cercul

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2,$$

care are cu curba dată $y=f(x)$ cel puțin un contact de ordinul al doilea, se numește *cerc de curbură* în punctul dat. Raza acestui cerc

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

se numește *rază de curbură*, iar mărimea $k=\frac{1}{R}$ — *curbură*.

3°. E v o l u t ă. Locul geometric al centrelor cercurilor de curbură (ξ, η) *(centrele de curbură)*

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

se numește *evoluta* (*desfășurata*) curbei date $y=f(x)$.

1591. Să se determine parametrii k și b ai dreptei

$$y=kx+b,$$

astfel încît ea să aibă cu curba

$$y=x^3-3x^2+2$$

un contact de ordin mai mare decît al doilea.

1592. Pentru ce valoare a coeficienților a, b și c are parabola

$$y=ax^2+bx+c$$

un contact de ordinul al doilea cu curba $y=e^x$ în punctul $x=x_0$?

1593. Care este, în punctul $x=0$, ordinul de contact al axei Ox cu curbele

a) $y=1-\cos x$; b) $y=\operatorname{tg}x-\sin x$; c) $y=e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$.

1594. Să se demonstreze că curba $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ pentru $x\neq0$ și $y=0$ pentru $x=0$ are în punctul $x=0$ un contact de ordin infinit cu axa Ox.

1595. Să se determine raza și centrul de curbură al hiperbolei

$$xy=1$$

în punctele: a) $M(1;\ 1)$; b) $N(100;\ 0{,}01)$.

Să se calculeze razele de curbură ale următoarelor curbe:

1596. Parabola $y^2=2px$.

1597. Elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1598. Hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1599. Astroida $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

1600. Elipsa $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

1601. Cicloida $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.

1602. Evolventa cercului $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$.

1603. Să se demonstreze că raza de curbură a curbei de gradul al doilea

$$y^2=2px-qx^2$$

este proporțională cu cubul segmentului normalei.

1604. Să se scrie formula razei de curbură a unei curbe date în coordonate polare.

Să se calculeze razele de curbură ale următoarelor curbe scrise în coordonate polare:

1605. Spirala lui Arhimede $r=a\varphi$.

1606. Spirala logaritmică $r=ae^{m\varphi}$.

1607. Cardioida $r=a(1+\cos\varphi)$.

1608. Lemniscata $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

1609. Să se determine pe curba $y=\ln x$ punctul în care curbura este maximă.

1610. Se cere să se asigure trecerea lină de pe dreapta $y=0$ $(-\infty<x\leq 0)$ pe cercul de rază $R=1\,000$ m cu ajutorul parabolei cubice $y=\frac{kx^3}{6}$ în așa fel, încît curbura acestei curbe de trecere să crească monoton de la 0 la 0,001. Pe ce porțiune minimă $[0,\ x_0]$ se poate face aceasta?

Ce ecuații are:

1611. Evoluta parabolei $y^2=2px$.

1612. Evoluta elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1613. Evoluta astroidei $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

1614. Evoluta tractricei

$$x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}.$$

1615. Evoluta spiralei logaritmice $r=ae^{m\varphi}$.

1616. Să se demonstreze că evoluta cicloidei

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

este tot o cicloidă, care diferă de cicloida dată numai prin poziția ei.

§ 15. Rezolvarea aproximativă a ecuațiilor

1°. Metoda părților proporționale (metoda coardelor). Dacă funcția $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a,\ b]$ și

$$f(a)\,f(b)<0,$$

iar $f'(x)\neq 0$ pentru $a<x<b$, ecuația

$$f(x)=0. \tag{1}$$

are o rădăcină reală ξ și numai una în intervalul $(a,\ b)$. Drept primă aproximație a acestei rădăcini se poate lua valoarea

$$x_1=a+\delta_1,$$

unde

$$\delta_1=-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

Aplicînd mai departe această metodă aceluia din intervalele $(a,\ x_1)$ sau $(x_1,\ b)$ pentru care funcția $f(x)$ are semne diferite la extremitățile sale, obținem a doua aproximație x_2 a rădăcinii ξ etc. Pentru evaluarea aproximației de ordinul n a lui x_n avem formula

$$|x_n-\xi|\leq\frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

unde $m=\inf\limits_{a<x<b}|f'(x)|$, iar

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi.$$

2°. Metoda lui Newton (metoda tangentelor). Dacă $f''(x)\neq 0$ pe segmentul $[a,\ b]$ și $f(a)\,f''(a)>0$, putem lua drept primă aproximație ξ_1 a rădăcinii ξ a ecuației (1) valoarea

$$\xi_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Repetînd această metodă obținem un șir de aproximații ξ_n $(n=1,\ 2,\ \dots)$ care tind rapid către rădăcina ξ, a căror precizie se evaluează cu ajutorul formulei (2).

Pentru o orientare aproximativă este util să schițăm graficul funcției $y=f(x)$.

Folosind metoda părţilor proporţionale, să se determine cu 3 zecimale exacte rădăcinile următoarelor ecuaţii:

1617. $x^3-6x+2=0$. **1619.** $x-0{,}1 \sin x=2$.

1618. $x^4-x-1=0$. **1620.** $\cos x=x^2$.

Folosind metoda lui Newton, să se determine, cu aproximaţia indicată, rădăcinile următoarelor ecuaţii:

1621. $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$ (cu 3 zecimale exacte).

1622. $x \lg x=1$ (cu 4 zecimale exacte).

1623. $\cos x \cdot \operatorname{ch} x=1$ (cu 3 zecimale exacte) (cele două rădăcini pozitive).

1624. $x+e^x=0$ (cu 5 zecimale exacte).

1625. $x \operatorname{th} x=1$ (cu 6 zecimale exacte).

1626. Să se calculeze cu 3 zecimale exacte primele trei rădăcini pozitive ale ecuaţiei

$$\operatorname{tg} x=x.$$

1627. Să se calculeze cu 3 zecimale exacte cele două rădăcini pozitive ale ecuaţiei

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}.$$

CAPITOLUL III

INTEGRALA NEDEFINITĂ

§ 1. Cele mai elementare integrale nedefinite

1°. Noţiunea de integrală nedefinită. Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă şi $F'(x)=f(x)$, atunci

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,$$

unde C este o constantă arbitrară.

2°. Proprietăţile fundamentale ale integralei nedefinite:

a) $d\left[\int f(x)\,dx\right]=f(x)\,dx$;

b) $\int d\Phi(x)=\Phi(x)+C$;

c) $\int Af(x)\,dx=A\int f(x)\,dx$ $(A=\text{const})$;

d) $\int [f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$.

3°. Tabela integralelor elementare:

I. $\displaystyle\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq-1)$.

II. $\displaystyle\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C \quad (x\neq 0)$.

III. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arctg} x+C,\\ -\operatorname{arcctg} x+C.\end{cases}$

IV. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$.

V. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C.\end{cases}$

VI. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm1}\right|+C$.

VII. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0)$; $\int e^x dx = e^x + C$.

VIII. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

IX. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

X. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

XI. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

XII. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$.

XIII. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$.

XIV. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

XV. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

4°. Principalele metode de integrare.

a) *Metoda introducerii unei noi variabile.* Dacă

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

atunci

$$\int f(u)\,du = F(u) + C,$$

unde $u = \varphi(x)$.

b) *Metoda descompunerii.* Dacă

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

atunci

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

c) *Metoda substituției.* Punînd

$$x = \varphi(t),$$

unde $\varphi(t)$ este o funcție continuă împreună cu derivata ei $\varphi'(t)$, obținem:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

d) *Metoda integrării prin părți.* Dacă u și v sînt niște funcții derivabile de x, atunci

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Folosind tabela integralelor elementare, să se calculeze următoarele integrale:

1628. $\int (3-x^2)^3\,dx$.

1629. $\int x^2(5-x)^4\,dx$.

1630. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx$.

1631. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right) dx$.

1633. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$.

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$.

1635. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$.

1636. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

1637. $\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x}\,dx$.

1638. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3}\,dx$.

1639. $\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$.

1640. $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^2}$.

1641. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx$.

1642. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$.

1644. $\int (2^x + 3^x)^2\,dx$.

1645. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx$.

1646. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,dx$.

1647. $\int (1 + \sin x + \cos x)\,dx$.

1648. $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$.

1649. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$

1650. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

1651. $\int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x)\,dx$.

1652 $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$.

1653. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

1654. Să se demonstreze că, dacă

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

atunci

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

Să se calculeze integralele:

1655. $\int \frac{dx}{x+a}$.

1656. $\int (2x-3)^{10}\,dx$.

1657. $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$.

1658. $\int \frac{dx}{12-5x}$.

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$.

1660. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\,dx$.

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

1665. $\int (e^{-x}+e^{-2x})\,dx$.

1666. $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\,dx$.

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

1668. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

1670. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

1671. $\int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]\,dx$.

1672. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$.

1673. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$.

Să se calculeze printr-o transformare convenabilă a expresiei de sub semnul integrală următoarele integrale:

1674. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

1676. $\int \frac{x\,dx}{3-2x^2}$.

1677. $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

1678. $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$.

1679. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8-2}$.

1680. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Indicație. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$.

1681. $\int \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1684. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

1685. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

1686. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$.

1687. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1689. $\int xe^{-x^2}\,dx$.

1690. $\int \frac{e^x\,dx}{2+e^x}$.

1691. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

1692. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

1693. $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

1694. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

1695. $\int \sin^5 x\cos x\,dx$.

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx$.

1697. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

1698. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

1699. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,dx$.

1700. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\,dx$.

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$.

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

1707. $\int \frac{\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}\,dx$.

1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

1709. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\,dx$.

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

Indicație. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = d\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

1713. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$.

1714. $\int \frac{x^{14}\,dx}{(x^5+1)^4}$.

1715. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}\,dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$.

1716. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$.

1717. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

1718. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$.

1719. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}\,dx$.

1720. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

Să se calculeze, folosind metoda descompunerii, integralele:

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2\,dx$.

1722. $\int \frac{1+x}{1-x}\,dx$.

1723. $\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$.

1724. $\int \frac{x^3}{3+x}\,dx$.

1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\,dx$.

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\,dx$.

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$.

1728. $\int \frac{x^5}{x+1}\,dx$.

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$.

Indicație.

$$x\equiv-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}.$$

1731. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

Indicație.

$$1\equiv\frac{1}{4}[(x+3)-(x-1)].$$

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$.

1735. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

1736. $\int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

1737. $\int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)}$.

1738. $\int \frac{x\,dx}{x^4+3x^2+2}$.

1739. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$ $(a\neq b)$.

1740. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(|a|\neq|b|)$.

1741. $\int \sin^2 x\,dx$.

1742. $\int \cos^2 x\,dx$.

1743. $\int \sin x\sin(x+\alpha)\,dx$.

1744. $\int \sin 3x\cdot\sin 5x\,dx$.

1745. $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx$.

1746. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

1747. $\int \sin^3 x\,dx$.

1748. $\int \cos^3 x\,dx$.

1749. $\int \sin^4 x\,dx$.

1750. $\int \cos^4 x\,dx$.

1751. $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx$.

1752. $\int \mathrm{tg}^3 x\,dx$.

1753. $\int \sin^2 3x\sin^3 2x\,dx$.

1754. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

Indicație.

$$1\equiv\sin^2 x+\cos^2 x.$$

1755. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}$.

1756. $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\cos^3 x}$.

1757. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$.

1758. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1759. $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

1760. $\int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}\,dx$.

1761. $\int \mathrm{sh}^2 x\,dx$.

1762. $\int \mathrm{ch}^2 x\,dx$.

1763. $\int \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,2x\,dx$.

1764. $\int \mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{ch}\,3x\,dx$.

1765. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x}$.

Să se calculeze, folosind substituții convenabile, următoarele integrale

1766. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$.

1767. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx$.

1768. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$.

1769. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1770. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\,dx$.

1771. $\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}\, dx.$

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x}\, dx.$

1773. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\, dx.$

1774. $\int \frac{\ln x\, dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$

1775. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}.$

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

1777. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}.$

Să se calculeze, folosind substituțiile trigonometrice $x=a \sin t$, $x=a \operatorname{tg} t$, $x=a \sin^2 t$ etc., următoarele integrale (parametrii fiind pozitivi):

1778. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

1779. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-2}}.$

1780. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx.$

1781. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx.$

1783. $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}}\, dx.$

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$

Indicație. Se va folosi substituția $x-a=(b-a)\sin^2 t$.

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx.$

Folosind substituțiile hiperbolice $x=a \operatorname{sh} t$, $x=a \operatorname{ch} t$ etc., să se calculeze următoarele integrale (parametrii fiind pozitivi):

1786. $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx.$

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx.$

1788. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\, dx.$

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\, dx.$

Indicație. Punem $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t$.

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\, dx.$

$e^{-x}=u$

$e^x = \cos t$

$e^x dx = -\sin t\, dt$

Să se calculeze, folosind metoda integrării prin părți, următoarele integrale:

1791. $\int \ln x\, dx.$

1792. $\int x^n \ln x\, dx \quad (n \neq -1).$

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx.$

1794. $\int \sqrt{x} \ln^2 x\, dx.$

1795. $\int x e^{-x}\, dx.$

1796. $\int x^2 e^{-2x}\, dx.$

1797. $\int x^3 e^{-x^2}\, dx.$

1798. $\int x \cos x\, dx.$

1799. $\int x^2 \sin 2x\, dx.$

1800. $\int x \operatorname{sh} x\, dx.$

1801. $\int x^3 \operatorname{ch} 3x\, dx.$

1802. $\int \operatorname{arctg} x\, dx.$

1803. $\int \arcsin x\, dx.$

1804. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx.$

1805. $\int x^2 \arccos x\, dx.$

1806. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx.$

1807. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\, dx.$

1808. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\, dx.$

1809. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx.$

1810. $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)\, dx.$

Să se calculeze integralele:

1811. $\int x^5 e^{x^2}\, dx.$

1812. $\int (\arcsin x)^2\, dx.$

1813. $\int x (\operatorname{arctg} x)^2\, dx.$

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x}\, dx.$

1815. $\int \frac{x \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx.$

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}\, dx.$

1818. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx.$

1819. $\int \sqrt{x^2+a}\, dx.$

1820. $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2}\, dx.$

1821. $\int x \sin^2 x\, dx.$

1822. $\int e^{\sqrt{x}}\, dx.$

1823. $\int x \sin \sqrt{x}\, dx.$

1824. $\int \frac{x e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$

1825. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

1826. $\int \sin(\ln x)\,dx.$

1827. $\int \cos(\ln x)\,dx.$

1828. $\int e^{ax}\cos bx\,dx.$

1829. $\int e^{ax}\sin bx\,dx.$

1830. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx.$

1831. $\int (e^x-\cos x)^2\,dx.$

1832. $\int \frac{\operatorname{arcctg} e^x}{e^x}\,dx.$

1833. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\,dx.$

1834. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$

1835. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx.$

Calcularea următoarelor integrale se bazează pe reducerea trinomului de gradul al doilea la forma canonică și aplicarea formulelor de mai jos:

I. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \quad (a\neq 0).$

II. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C \quad (a\neq 0).$

III. $\int \frac{x\,dx}{a^2\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2\pm x^2|+C.$

IV. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C \quad (a>0).$

VI. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2\pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2\pm x^2}+C.$

VII. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C \quad (a>0).$

VIII. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

Să se calculeze integralele:

1836. $\int \frac{dx}{a+bx^2} \quad (ab\neq 0).$

1837. $\int \frac{dx}{x^2-x+2}.$

1838. $\int \frac{dx}{3x^2-2x-1}.$

1839. $\int \frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}.$

1840. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx.$

1841. $\int \frac{x\,dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}.$

1842. $\int \frac{x^3\,dx}{x^4-x^2+2}.$

1843. $\int \frac{x^5\,dx}{x^6-x^3-2}.$

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}.$

1845. $\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}.$

1846. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} \quad (b\neq 0).$

1847. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

1848. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}.$

1849. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}.$

1850. Să se demonstreze că dacă

$$y=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0),$$

atunci

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right)+C \quad \text{pentru} \quad a>0$$

și

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{y'}{\sqrt{b^2-4ac}}+C \quad \text{pentru} \quad a<0.$$

1851. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}.$

1852. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$

1853. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

1854. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}.$

1855. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\,dx.$

1856. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}.$

1858. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}.$

1860. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}.$

1861. $\int \sqrt{2+x-x^2}\,dx.$

1862. $\int \sqrt{2+x+x^2}\,dx.$

1863. $\int \sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,dx.$

1864. $\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$

1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,dx.$

§ 2. Integrarea funcţiilor raţionale

Să se calculeze, aplicînd metoda coeficienţilor nedeterminaţi, următoarele integrale:

1866. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$.

1867. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.

1868. $\int \frac{x^{10}\,dx}{x^2+x-2}$.

1869. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,dx$.

1870. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

1871. $\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$.

1872. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$.

1873. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$.

1874. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

1875. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

1876. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\,dx$.

1877. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

1878. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

1879. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

1880. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

1881. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

1882. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

1883. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

1884. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1885. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

1886. $\int \frac{dx}{x^6+1}$.

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

1888. $\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

1889. $\int \frac{x^2\,dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

1890. In ce condiţii integrala

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}\,dx$$

este o funcţie raţională?

Să se calculeze, folosind metoda lui Ostrogradski, integralele:

1891. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

1892. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

1893. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

1894. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

1895. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$.

1896. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,dx$.

1897. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

Să se separe partea algebrică a următoarelor integrale:

1898. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx$.

1899. $\int \frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$.

1900. $\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,dx$.

1901. Să se calculeze integrala

$$\int \frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

1902. In ce condiţii este integrala

$$\int \frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}\,dx$$

o funcţie raţională?

Să se calculeze, aplicînd diverse metode de calcul, următoarele integrale:

1903. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,dx$.

1904. $\int \frac{x\,dx}{x^8-1}$.

1905. $\int \frac{x^3\,dx}{x^8+3}$.

1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx$.

1907. $\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\,dx$.

1908. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^{10}-10)^2}$.

1909. $\int \frac{x^{11}\,dx}{x^8+3x^4+2}$.

1910. $\int \frac{x^9\,dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\,dx$.

1912. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}\,dx$.

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$.

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

1915. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\,dx.$

1916. $\int \frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}\,dx.$

1917. $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\,dx.$

1918. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx.$

1919. $\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\,dx.$

1920. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx.$

1921. Să se deducă formula de recurenţă pentru calcularea integralei

$$I_n=\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \qquad (a\neq 0).$$

Să se calculeze, folosind această formulă:

$$I_3=\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

I n d i c a ţ i e. Se va folosi identitatea

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2).$$

1922. Să se aplice substituţia $t=\frac{x+a}{x+b}$ pentru calcularea integralei

$$I=\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$$

(m şi n sînt numere naturale).
Să se calculeze, folosind această substituţie:

$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

1923. Să se calculeze

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}\,dx,$$

dacă $P_n(x)$ este un polinom de gradul n în raport cu x.

I n d i c a ţ i e. Se va folosi formula lui Taylor.

1924. Fie $R(x)=R^*(x^2)$, unde R^* este o funcţie raţională. Ce particularităţi are dezvoltarea funcţiei $R(x)$ în fracţii raţionale?

? **1925.** Să se calculeze

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

unde n este un număr întreg pozitiv.

§ 3. Integrarea funcţiilor iraţionale

Să se calculeze, reducînd funcţiile de sub semnul integrală la funcţii raţionale, următoarele integrale:

1926. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

1927. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$

1928. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx.$

1929. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx.$

1930. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}.$

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$

1933. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a>0).$

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n este un număr natural).

1935. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}.$

I n d i c a ţ i e. Punem $x=\left(\frac{u^2-1}{2u}\right)^2.$

1936. Să se demonstreze că integrala

$$\int R\left[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}},\ (x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx,$$

unde R este o funcţie raţională şi p, q, n sînt numere întregi, este o funcţie elementară dacă

$$p+q=kn,$$

unde k este un număr întreg.

Să se calculeze integralele iraţionalelor pătratice cele mai simple:

1937. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\,dx.$

1938. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

1939. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$

1940. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\,dx.$

1941. $\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}.$

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$

Să se calculeze, aplicînd formula

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\, dx = Q_{n-1}(x)\, y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

unde $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ este un polinom de gradul n, $Q_{n-1}(x)$ un polinom de gradul $n-1$ şi λ un număr, următoarele integrale:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\, dx.$

1944. $\int \frac{x^{10}\, dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

1945. $\int x^4 \sqrt{a^2-x^2}\, dx.$

1946. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}\, dx.$

1947. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}.$

1948. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}.$

1949. $\int \frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}.$

1950. $\int \frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}.$

1951. In ce condiţii integrala

$$\int \frac{a_1 x^2+b_1 x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$$

este o funcţie algebrică?

Să se calculeze $\int \frac{P(x)}{Q(x)\, y}\, dx$, unde $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, descompunînd funcţia raţională $\frac{P(x)}{Q(x)}$ în fracţii simple.

1952. $\int \frac{x\, dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}.$

1953. $\int \frac{x\, dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}.$

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}\, dx.$

1955. $\int \frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}\, dx.$

1956. $\int \frac{x\, dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1958. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}.$

1959. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}.$

1960. $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\, dx.$

Să se calculeze, reducînd trinoamele de gradul al doilea la forma canonică, următoarele integrale:

1961. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$

1962. $\int \frac{x\, dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$

1963. $\int \frac{(x+1)\, dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

1964. Să se calculeze cu ajutorul substituţiei omografice $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$ integrala

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1965. Să se calculeze

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

Să se calculeze, aplicînd substituţiile lui Euler:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+z$, dacă $a>0$;

2) $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$, dacă $c>0$;

3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$,

următoarele integrale:

1966. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$

1967. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\, dx.$

1969. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\, dx.$

1970. $\int \frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}.$

Să se afle, folosind diverse metode de calcul, următoarele integrale:

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}.$

1972. $\int \frac{x\, dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}.$

1973. $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}.$

1974. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\, dx.$

1975. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\, dx.$

1976. $\int \frac{(x^2-1)\, dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

1977. $\int \frac{(x^2+1)\, dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}.$

1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}.$

1979. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

1980. Să se demonstreze că calcularea integralei

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx,$$

R fiind o funcţie raţională, se reduce la integrarea unei funcţii raţionale.

Integrala binomă

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

unde m, n şi p sînt numere raţionale, poate fi redusă la integrarea funcţiilor raţionale numai în următoarele trei cazuri (*teorema lui Cebîşev*):

Cazul 1. Să presupunem că p este un număr întreg. Punem $x=z^N$, unde N este numitorul comun al fracţiilor m şi n.

Cazul 2. Să presupunem că $\frac{m+1}{n}$ este un număr întreg. Punem $a+bx^n=z^N$, unde N este numitorul fracţiei p.

Cazul 3. Să presupunem că $\frac{m+1}{n}+p$ este un număr întreg. Aplicăm substituţia $ax^{-n}+b=z^N$, unde N este numitorul fracţiei p.

Să se calculeze următoarele integrale:

1981. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx$.

1982. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx$.

1983. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

1984. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1987. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

1988. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

1989. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$.

1990. In ce cazuri integrala

$$\int \sqrt{1+x^m}\,dx,$$

unde m este un număr raţional, reprezintă o funcţie elementară?

§ 4. Integrarea funcţiilor trigonometrice

Integralele de forma

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx,$$

unde m şi n sînt numere întregi, se calculează cu ajutorul unor artificii de calcul sau cu ajutorul unor formule de recurenţă.

Să se calculeze integralele:

1991. $\int \cos^5 x\,dx$.

1992. $\int \sin^6 x\,dx$.

1993. $\int \cos^6 x\,dx$.

1994. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$.

1995. $\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx$.

1996. $\int \sin^5 x \cos^5 x\,dx$.

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$.

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\,dx$.

1999. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

2003. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$.

2004. $\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$.

2005. $\int \operatorname{ctg}^6 x\,dx$.

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$.

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

2008. $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

2011. Să se deducă formulele de recurenţă pentru integralele:

a) $I_n=\int \sin^n x\,dx$; b) $K_n=\int \cos^n x\,dx$ $(n>2)$

şi cu ajutorul lor să se calculeze

$$\int \sin^6 x\,dx \quad \text{şi} \quad \int \cos^8 x\,dx.$$

2012. Să se deducă formulele de recurenţă pentru integralele:

a) $I_n=\int \frac{dx}{\sin^n x}$; b) $K_n=\int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n>2)$

şi cu ajutorul lor să se calculeze

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \quad \text{şi} \quad \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

Următoarele integrale se calculează cu ajutorul formulelor de mai jos:

I. $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.

II. $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$.

III. $\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.

Să se calculeze integralele:

2013. $\int \sin 5x \cos x\, dx$.

2014. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x\, dx$.

2015. $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3}\, dx$.

2016. $\int \sin x \sin(x+a) \sin(x+b)\, dx$.

2017. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx\, dx$.

2018. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x\, dx$.

Următoarele integrale se calculează folosind identităţile:

$$\sin(\alpha-\beta) \equiv \sin[(x+\alpha)-(x+\beta)],$$
$$\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos[(x+\alpha)-(x+\beta)].$$

Să se calculeze integralele:

2019. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

2020. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

2021. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

2023. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$.

2024. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a)\, dx$.

Integralele de forma

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

unde R este o funcţie raţională, se reduc în general la integrarea funcţiilor raţionale, cu ajutorul substituţiei $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

a) Dacă este satisfăcută egalitatea

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$$

sau

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

este comod să aplicăm substituţia $\cos x = t$ sau, respectiv, $\sin x = t$.

b) Dacă este satisfăcută egalitatea

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

este util să folosim substituţia $\operatorname{tg} x = t$.

Să se calculeze integralele:

2025. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$.

2026. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

2027. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x}\, dx$.

2028. $\int \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$;

a) $0<\varepsilon<1$; b) $\varepsilon>1$.

2029. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\, dx$.

2030. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

2031. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$.

2032. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$.

2033. $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$.

2034. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

2036. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\, dx$.

2037. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$.

2038. $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x}\, dx$.

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$.

2041. Să se calculeze integrala

$$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x},$$

scriind numitorul sub formă calculabilă prin logaritmi.

2042. Să se demonstreze că

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x}\, dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C,$$

A, B, C fiind constante.

Indicație. Punem

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A\,(a \sin x + b \cos x) + B\,(a \cos x - b \sin x),$$

unde A și B sînt constante.

Să se calculeze integralele:

2043. $\displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x}\, dx.$

2044. $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x}.$

2045. $\displaystyle\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2}.$

2046. Să se demonstreze că

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c}\, dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| +$$

$$+ C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c},$$

unde A, B, C sînt nişte coeficienţi constanţi.

Să se calculeze integralele:

2047. $\displaystyle\int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3}\, dx.$

2048. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}\, dx.$

2049. $\displaystyle\int \frac{2 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x - 2}\, dx.$

2050. Să se demonstreze că

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x}\, dx =$$

$$= A \sin x + B \cos x + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

A, B, C sînt coeficienţi constanţi.

Să se calculeze integralele:

2051. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x}{\sin x + 2 \cos x}\, dx.$

2052. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \cos^2 x}{\sin x + 2 \cos x}\, dx.$

2053. Să se demonstreze că dacă $(a-c)^2 + b^2 \neq 0$, atunci

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x}\, dx = A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

unde A, B sînt coeficienţi nedeterminaţi, iar λ_1, λ_2 sînt rădăcinile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2),$$

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x \text{ și } k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} \qquad (i = 1,\ 2).$$

Să se calculeze integralele:

2054. $\displaystyle\int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}\, dx.$

2055. $\displaystyle\int \frac{(\sin x + \cos x)\, dx}{2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}.$

2056. $\displaystyle\int \frac{\sin x - 2 \cos x}{1 + 4 \sin x \cos x}\, dx.$

2057. Să se demonstreze că

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}},$$

unde A, B, C sînt coeficienţi nedeterminaţi.

2058. Să se calculeze

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3}.$$

2059. Să se demonstreze că

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} + B \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}} +$$

$$+ C \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-2}} \qquad (|a| \neq |b|),$$

şi să se determine coeficienţii A, B şi C în ipoteza că n este un număr natural mai mare decît unitatea.

Să se calculeze integralele:

2060. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

2061. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}\,dx$.

2062. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$.

2063. $\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ $(0<\varepsilon<1)$.

2064. $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}\,dx$.

Indicaţie. Se va pune $t=\dfrac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$.

2065. Să se deducă formula de recurenţă pentru integrala

$$I_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$$

(n fiind un număr natural).

§ 5. Integrarea diferitelor funcţii transcendente

2066. Să se demonstreze că dacă $P(x)$ este un polinom de gradul n, atunci

$$\int P(x)e^{ax}dx=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\ldots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

2067. Să se demonstreze că dacă $P(x)$ este un polinom de gradul n, atunci

$$\int P(x)\cos ax\,dx=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{\mathrm{IV}}(x)}{a^4}-\ldots\right]+$$
$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{\mathrm{V}}(x)}{a^4}-\ldots\right]+C$$

şi

$$\int P(x)\sin ax\,dx=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{\mathrm{IV}}(x)}{a^2}-\ldots\right]+$$
$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{\mathrm{V}}(x)}{a^4}-\ldots\right]+C.$$

Să se calculeze integralele:

2068. $\int x^3e^{3x}dx$,

2069. $\int (x^2-2x+2)\,e^{-x}dx$.

2070. $\int x^5\sin 5x\,dx$.

2071. $\int (1+x^2)^2\cos x\,dx$.

2072. $\int x^7e^{-x^2}dx$.

2073. $\int x^2e^{\sqrt{x}}dx$.

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx\,dx$.

2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx\,dx$.

2076. $\int xe^x\sin x\,dx$.

2077. $\int x^2e^x\cos x\,dx$.

2078. $\int xe^x\sin^2 x\,dx$.

2079. $\int (x-\sin x)^3dx$.

2080. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$.

2081. Să se demonstreze că dacă R este o funcţie raţională şi numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt comensurabile, atunci integrala

$$\int R(e^{a_1x}, e^{a_2x}, \ldots, e^{a_nx})\,dx$$

este o funcţie elementară.

Să se calculeze următoarele integrale:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

2083. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$.

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

2085. $\int \frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

2086. $\int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}\,dx$.

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}\,dx$.

2089. $\int \sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx$.

2090. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

2091. Să se demonstreze că integrala

$$\int R(x)e^{ax}\,dx,$$

unde R este o funcţie raţională al cărei numitor are numai rădăcini reale, se exprimă prin funcţii elementare şi o funcţie transcedentă

$$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \mathrm{li}\,(e^{ax}) + C,$$

unde

$$\mathrm{li}\,x = \int \frac{dx}{\ln x}.$$

2092. In ce caz integrala

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^{x}\,dx,$$

unde $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}$ şi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt constante, este o funcţie elementară?

Să se calculeze integralele:

2093. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x\,dx.$

2094. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx.$

2095. $\int \frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}\,dx$

2096. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx.$

2097. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}\,dx.$

Să se calculeze integralele care conţin funcţiile $\ln f(x)$, $\mathrm{arctg}\, f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, unde $f(x)$ este o funcţie algebrică:

2098. $\int \ln^n x\,dx$ (n este un număr natural).

2099. $\int x^3 \ln^3 x\,dx.$

2100. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx.$

2101. $\int \ln\left[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}\right] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

2102. $\int \ln^2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx.$

2103. $\int \ln\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right) dx.$

2104. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

2105. $\int x\,\mathrm{arctg}\,(x+1)\,dx.$

2106. $\int \sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}\,dx.$

2107. $\int x \arcsin(1-x)\,dx.$

2108. $\int \arcsin \sqrt{x}\,dx.$

2109. $\int x \arccos \frac{1}{x}\,dx.$

2110. $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\,dx.$

2111. $\int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

2112. $\int \frac{x \arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

2113. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x \ln(1+x^2)\,dx.$

2114. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x}\,dx.$

2115. $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Să se calculeze integralele conţinînd funcţii hiperbolice:

2116. $\int \mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{ch}^2 x\,dx.$

2117. $\int \mathrm{ch}^4 x\,dx.$

2118. $\int \mathrm{sh}^3 x\,dx.$

2119. $\int \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,2x\,\mathrm{sh}\,3x\,dx.$

2120. $\int \mathrm{th}\,x\,dx.$

2121. $\int \mathrm{cth}^2 x\,dx.$

2122. $\int \sqrt{\mathrm{th}\,x}\,dx.$

2123. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}\,x + 2\,\mathrm{ch}\,x}.$

2124. $\int \mathrm{sh}\,ax \sin bx\,dx.$

2125. $\int \mathrm{sh}\,ax \cos bx\,dx.$

§ 6. Diferite exemple de integrare a funcţiilor

Să se calculeze integralele:

2126. $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}.$

2127. $\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^2)^3}.$

2128. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}.$

2129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

2130. $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx.$

2131. $\int \frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

2132. $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx.$

2133. $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

2134. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

2135. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

2136. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

2137. $\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2138. $\int \frac{(1+x)\,dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}\,dx$.

2140. $\int (2x+3)\arccos(2x-3)\,dx$.

2141. $\int x\ln(4+x^4)\,dx$.

2142. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2143. $\int \frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

2144. $\int x\sqrt{x^2+1}\,\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$.

2145. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

2146. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

2147. $\int \frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}\,dx$.

2148. $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

2149. $\int \frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,dx$.

2150. $\int \frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$.

2151. $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

2152. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

2153. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}\,dx$.

2154. $\int \frac{x^3\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2155. $\int \frac{x^4\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$.

2156. $\int \frac{x\operatorname{arcctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

2157. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}\,dx$.

2158. $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$.

2159. $\int x(1+x^2)\operatorname{arcctg} x\,dx$.

2160. $\int x^x(1+\ln x)\,dx$.

2161. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$.

2162. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx$.

2163. $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^2-(e^{x-1}+1)^2}$.

2164. $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x+1}\,dx$.

2165. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x\,dx$.

2166. $\int |x|\,dx$.

2167. $\int x|x|\,dx$.

2168. $\int (x+|x|)^2\,dx$.

2169. $\int \{|1+x|-|1-x|\}\,dx$.

2170. $\int e^{-|x|}\,dx$.

2171. $\int \max(1,\ x^2)\,dx$.

2172. $\int \varphi(x)\,dx$, unde $\varphi(x)$ este distanţa între numărul x şi numărul întreg cel mai apropiat.

2173. $\int [x]\,|\sin \pi x|\,dx \quad (x \geq 0)$.

2174. $\int f(x)\,dx$, unde $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{pentru } |x|\leq 1;\\ 1-|x| & \text{pentru } |x|>1.\end{cases}$

2175. $\int f(x)\,dx$, unde $f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } -\infty<x<0;\\ x+1, & \text{dacă } 0\leq x\leq 1;\\ 2x, & \text{dacă } 1<x<+\infty.\end{cases}$

2176. Să se calculeze $\int xf''(x)\,dx$.

2177. Să se calculeze $\int f'(2x)\,dx$.

2178. Să se calculeze $f(x)$, dacă $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$.

2179. Să se calculeze $f(x)$, dacă $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.

2180. Să se calculeze $f(x)$, dacă

$$f'(\ln x)=\begin{cases}1 & \text{pentru } 0<x\leq 1;\\ x & \text{pentru } 1<x<+\infty\end{cases}$$

şi $f(0)=0$.

CAPITOLUL IV

INTEGRALA DEFINITĂ

§ 1. Integrala definită ca limita unei sume

1°. Integrala în sensul lui Riemann. Dacă funcţia $f(x)$ este definită pe $[a, b]$ şi $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, numim *integrala* funcţiei $f(x)$ în intervalul (a, b) numărul

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad (1)$$

unde $x_i\leq\xi_i\leq x_{i+1}$ şi $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

Pentru ca limita (1) să existe este necesar şi suficient ca *suma integrală inferioară*

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i$$

şi *suma integrală superioară*

$$\overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i,$$

unde

$$m_i=\inf_{x_i\leq x\leq x_{i+1}} f(x) \quad \text{şi} \quad M=\sup_{x_i\leq x\leq x_{i+1}} f(x)$$

să aibă o limită comună pentru $\max|\Delta x_i|\to 0$.

Funcţiile $f(x)$, pentru care limita din membrul al doilea al egalităţii (1) există, se numesc *funcţii integrabile* în intervalul dat. In particular: a) funcţiile continue, b) funcţiile mărginite avînd un număr finit de puncte de discontinuitate, c) funcţiile mărginite şi monotone sînt integrabile pe orice segment finit.

2°. Condiţia de integrabilitate. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia $f(x)$ să fie integrabilă pe segmentul dat $[a, b]$ este dată de egalitatea

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

unde ω_i este oscilaţia funcţiei $f(x)$ pe segmentul $[x_i, x_{i+1}]$.

2181. Să se calculeze suma integrală S_n pentru funcţia

$$f(x)=1+x$$

pe segmentul $[-1, 4]$, împărţind acest segment în n intervale egale şi alegînd valorile variabilei $\xi_i (i=0, 1, \ldots, n-1)$ la mijlocul acestor intervale.

2182. Să se calculeze, pentru funcţiile $f(x)$ date, sumele integrale inferioare $\underline{S}_n$ şi sumele integrale superioare $\overline{S}_n$ pe segmentele corespunzătoare, împărţindu-le în n părţi egale, dacă

a) $f(x)=x^3$ $\quad [-2\leq x\leq 3]$;

b) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad [0\leq x\leq 1]$;

c) $f(x)=2^x$ $\quad [0\leq x\leq 10]$.

2183. Să se calculeze suma integrală inferioară pentru funcţia $f(x)=x^4$ pe segmentul $[1, 2]$, împărţind acest segment în n părţi, a căror lungime formează o progresie geometrică. Care este limita acestei sume dacă $n\to\infty$?

2184. Plecînd de la definiţia integralei, să se calculeze

$$\int_0^T (v_0+gt)\,dt,$$

v_0 şi g fiind constante.

Să se calculeze integralele definite de mai jos, considerîndu-le ca limite ale unor sume integrale corespunzătoare obţinute prin împărţirea intervalului de integrare în mod convenabil:

2185. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^2\,dx.$

2186. $\displaystyle\int_0^1 a^x\,dx \quad (a>0).$

2187. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$

2188. $\displaystyle\int_0^x \cos t\,dt.$

2189. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0<a<b)$.

Indicație. Se va pune $\xi_i=\sqrt{x_i x_{i+1}}$ $(i=0, 1, \ldots, n)$.

2190. $\int\limits_a^b x^m\,dx$ $(0<a<b;\ m\neq -1)$.

Indicație. Se vor alege punctele de diviziune astfel, încît abscisele lor x_i să formeze o progresie geometrică.

2191. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ $(0<a<b)$.

2192. Să se calculeze integrala lui Poisson

$$\int\limits_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$

pentru: a) $|\alpha|<1$; b) $|\alpha|>1$.

Indicație. Se va folosi descompunerea polinomului $\alpha^{2n}-1$ în factori pătratici.

2193. Să presupunem că funcțiile $f(x)$ și $\varphi(x)$ sînt continue pe $[a, b]$. Să se demonstreze că

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\varphi(\theta_i)\,\Delta x_i=\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

unde $x_i\leqq\xi_i\leqq x_{i+1}$, $x_i\leqq\theta_i\leqq x_{i+1}$, $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ și $\Delta x_i=x_{i+1}-x$ $(x_0=a,\ x_n=b)$.

2194. Să se arate că funcția discontinuă

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

este integrabilă în intervalul $[0, 1]$.

2195. Să se arate că funcția lui Riemann

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional;}\\ \frac{1}{n}, & \text{dacă } x=\frac{m}{n},\end{cases}$$

unde m și n $(n\geqq 1)$ sînt numere întregi prime între ele, este integrabilă în orice interval finit.

2196. Să se arate că funcția

$$f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], \text{ dacă } x\neq 0$$

și $f(0)=0$, este integrabilă pe segmentul $[0, 1]$.

2197. Să se demonstreze că funcția lui Dirichlet

$$\chi(x)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional;}\\ 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional,}\end{cases}$$

este integrabilă în orice interval.

2198. Să presupunem că funcția $f(x)$ este integrabilă pe $[a, b[$ și

$$f_n(x)=\frac{1}{n}[nf(x)] \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\,dx=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

2199. Să se demonstreze că dacă funcția $f(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$, atunci există un șir de funcții continue $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$, astfel încît

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

2200. Să se demonstreze că dacă funcția mărginită $f(x)$ este integrabilă pe segmentul $[a, b]$, valoarea ei absolută $|f(x)|$ este și ea integrabilă pe $[a, b]$ și are loc inegalitatea

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\leqq\int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

2201. Să presupunem că funcția $f(x)$ este absolut integrabilă pe segmentul $[a, b]$, cu alte cuvinte, să presupunem că integrala $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ există. Este această funcție integrabilă pe $[a, b]$?

Să se studieze exemplul:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este raţional;} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ este iraţional.}\end{cases}$$

2202. Să presupunem că funcţia $\varphi(x)$ este definită şi continuă pe segmentul $[A, B]$, funcţia $f(x)$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi $A\leqq f(x)\leqq B$ pentru $a\leqq x\leqq b$. Să se demonstreze că funcţia $\varphi(f(x))$ este integrabilă pe $[a, b]$.

2203. Din integrabilitatea funcţiilor $f(x)$ şi $\varphi(x)$ rezultă oare neapărat că şi funcţia $f(\varphi(x))$ este integrabilă?

Să se studieze exemplul

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } x=0; \\ 1, & \text{dacă } x\neq 0,\end{cases}$$

şi $\varphi(x)$ este funcţia lui Riemann (v. problema 2195).

2204. Fie funcţia $f(x)$ integrabilă pe segmentul $[A, B]$. Să se demonstreze că funcţia $f(x)$ se bucură de proprietatea *continuităţii integrale*, adică

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\, dx=0,$$

unde $[a, b]\subset[A, B]$.

2205. Fie o funcţie $f(x)$, integrabilă pe segmentul $[a, b]$. Să se demonstreze că egalitatea

$$\int_a^b f^2(x)\, dx=0$$

este valabilă atunci şi numai atunci cînd $f(x)=0$ în toate punctele aparţinînd segmentului $[a, b]$, în care funcţia $f(x)$ este continuă.

§ 2. Calculul integralelor definite cu ajutorul integralelor nedefinite

1°. Formula lui Newton-Leibniz. Dacă funcţia $f(x)$ este definită şi continuă pe segmentul $[a, b]$ şi $F(x)$ este *primitiva* ei, adică $F'(x)=f(x)$, atunci avem:

$$\int_a^b f(x)\, dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Din punct de vedere geometric, integrala definită $\int_a^b f(x)\, dx$ reprezintă aria algebrică S a figurii mărginită de curba $y=f(x)$, de axa Ox şi de două perpendiculare pe axa Ox: $x=a$ şi $x=b$ (fig. 9).

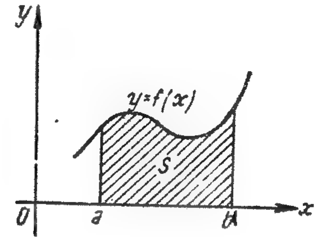

Fig. 9

2°. Formula integrării prin părţi. Dacă funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sînt continue şi au derivate continue $f'(x)$ şi $g'(x)$ pe segmentul $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx=f(x)\, g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x) f'(x)\, dx.$$

3°. Schimbarea variabilei. Dacă: 1) funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, b]$; 2) funcţia $\varphi(t)$ este continuă împreună cu prima sa derivată $\varphi'(t)$ pe segmentul $[\alpha, \beta]$, unde $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$; 3) funcţia compusă $f(\varphi(t))$ este definită şi continuă pe $[\alpha, \beta]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\, dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Să se calculeze, aplicînd formula lui Newton-Leibniz, următoarele integrale definite şi să se figureze ariile mixtilinii corespunzătoare:

2206. $\displaystyle\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx.$

2207. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\, dx.$

2208. $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$

2209. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2210. $\displaystyle\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

2211. $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\, dx.$

2212. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1} \quad (0<\alpha<\pi).$

2213. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x} \quad (0 \leqq \varepsilon < 1).$

2214. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a|<1,\ |b|<1,\ ab>0).$

2215. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x} \quad (ab \neq 0).$

2216. Să se explice de ce aplicarea formală a formulei lui Newton-Leibniz conduce la rezultate false, dacă:

a) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$; b) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sec^2 x\, dx}{2+\operatorname{tg}^2 x}$; c) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) dx.$

2217. Să se calculeze $\int\limits_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right) dx.$

2218. Să se calculeze $\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx.$

Să se determine cu ajutorul integralelor definite limitele următoarelor sume:

2219. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right).$

2220. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right).$

2221. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$

2222. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$

2223. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} \quad (p>0).$

2224. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$

2225. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

2226. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right].$

Neglijînd de fiecare dată infiniţii mici de ordin superior, să se găsească limitele următoarelor sume:

2227. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}+\ldots\right.$

$\left.\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right].$

2228. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}.$

2229. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}. \quad (x>0)$

2230. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right).$

2231. Să se calculeze

$\frac{d}{dx}\int\limits_{a}^{b}\sin x^2\,dx,\quad \frac{d}{da}\int\limits_{a}^{b}\sin x^2\,dx,\quad \frac{d}{db}\int\limits_{a}^{b}\sin x^2\,dx.$

2232. Să se calculeze

a) $\frac{d}{dx}\int\limits_{0}^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$; b) $\frac{d}{dx}\int\limits_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$; c) $\frac{d}{dx}\int\limits_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\,dt.$

2233. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos x^2\, dx}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x (\operatorname{arctg} x)^2\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}$.

2234. Să se demonstreze că

$$\int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}$$

pentru $x \to \infty$.

2235. Să se calculeze

$$\lim_{x\to+0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x}\, dx}.$$

2236. Fie $f(x)$ o funcţie continuă şi pozitivă. Să se demonstreze că funcţia

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t)\, dt}{\int_0^x f(t)\, dt}$$

este crescătoare pentru $x \geqq 0$.

2237. Să se calculeze:

a) $\int_0^2 f(x)\, dx$, dacă $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } 0 \leqq x \leqq 1, \\ 2-x & \text{pentru } 1 < x \leqq 2; \end{cases}$

b) $\int_0^1 f(x)\, dx$, dacă $f(x) = \begin{cases} x & \text{pentru } 0 \leqq x \leqq t, \\ t\cdot\dfrac{1-x}{1-t} & \text{pentru } t \leqq x \leqq 1. \end{cases}$

2238. Să se calculeze şi să se construiască graficele integralelor $I = I(\alpha)$, considerîndu-le funcţii de parametrul α, dacă:

a) $I = \int_0^1 x\,|x-\alpha|\, dx$;

b) $I = \int_0^\pi \dfrac{\sin^2 x}{1 + 2\alpha \cos x + \alpha^2}\, dx$;

c) $I = \int_0^\pi \dfrac{\sin x\, dx}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2}}$.

Să se calculeze, aplicînd formula integrării prin părţi, următoarele integrale definite:

2239. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x}\, dx$.

2240. $\int_0^\pi x \sin x\, dx$.

2241. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\, dx$.

2242. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\lg x|\, dx$.

2243. $\int_0^1 \arccos x\, dx$.

2244. $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\, dx$.

Să se calculeze, utilizînd o schimbare de variabilă convenabilă, următoarele integrale definite:

2245. $\int_{-1}^{1} \dfrac{x\, dx}{\sqrt{5-4x}}$.

2246. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

2247. $\int_0^{0,75} \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

2248. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

2249. $\int_0^1 \dfrac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$.

2250. Să se calculeze integrala $\int_{-1}^{1} \dfrac{1+x^2}{1+x^4}\, dx$, punînd $x - \dfrac{1}{x} = t$.

2251. Să se explice care sînt cauzele pentru care înlocuirea formală a lui x cu $\varphi(t)$ conduce la rezultate false, dacă:

$$\text{a)}\quad \int_{-1}^{1} dx, \quad \text{unde} \quad t=x^{\frac{2}{3}};$$

$$\text{b)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}, \quad \text{unde} \quad x=\frac{1}{t};$$

$$\text{c)}\quad \int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \quad \text{unde} \quad \operatorname{tg} x=t.$$

2252. Putem pune în integrala

$$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

$x=\sin t$?

2253. Putem lua în integrala $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ drept noi limite numerele π şi $\frac{\pi}{2}$, dacă facem schimbarea de variabilă $x=\sin t$?

2254. Să se demonstreze că dacă $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx.$$

2255. Să se demonstreze egalitatea

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)\,dx \qquad (a>0).$$

2256. Fie $f(x)$ o funcţie continuă pe segmentul $[A, B]\supset[a, b]$. Să se calculeze $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)\,dy$ pentru $A-a<x<B-b$.

2257. Să se demonstreze că dacă $f(x)$ este continuă pe $[0, 1]$, atunci

$$\text{a)}\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx;$$

$$\text{b)}\quad \int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$$

2258. Să se demonstreze că pentru funcţia $f(x)$, continuă pe $[-l, l]$, avem:

$$1)\quad \int_{-l}^{l} f(x)\,dx=2\int_0^l f(x)\,dx,$$

dacă funcţia $f(x)$ este pară, şi

$$2)\quad \int_{-l}^{l} f(x)\,dx=0.$$

dacă funcţia $f(x)$ este impară. Să se dea interpretarea geometrică a acestor fapte.

2259. Să se demonstreze că una din primitivele unei funcţii pare este o funcţie impară şi că orice primitivă a unei funcţii impare este o funcţie pară.

2260. Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\,dx,$$

introducînd o nouă variabilă

$$t=x+\frac{1}{x}.$$

2261. Să se facă în integrala

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$$

schimbarea de variabilă $\sin x=t$.

2262. Să se calculeze integrala

$$\int_{e^{-2\pi n}}^{1} \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right| dx,$$

unde n este un număr natural.

2263. Să se calculeze

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

2264. Să se calculeze integrala

$$\int_{-1}^{3} \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx,$$

dacă

$$f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}.$$

2265. Să se demonstreze că dacă $f(x)$ este o funcţie continuă şi periodică de perioadă T, definită pentru $-\infty<x<+\infty$, atunci

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx=\int_{0}^{T} f(x)\,dx,$$

unde a este un număr arbitrar.

2266. Să se demonstreze că pentru n impar funcţiile

$$F(x)=\int_{0}^{x}\sin^n x\,dx \quad \text{şi} \quad G(x)=\int_{0}^{x}\cos^n x\,dx$$

sînt periodice de perioadă 2π; iar pentru n par, fiecare din aceste funcţii este suma dintre o funcţie liniară şi o funcţie periodică.

2267. Să se demonstreze că funcţia

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

$f(x)$ fiind o funcţie continuă şi periodică de perioadă T, este în cazul general suma dintre o funcţie liniară şi o funcţie periodică de perioadă T.

Să se calculeze integralele:

2268. $\int_{0}^{1} x(2-x^2)^{12}\,dx.$

2269. $\int_{-1}^{1} \frac{x\,dx}{x^2+x+1}.$

2270. $\int_{1}^{e} (x\ln x)^2\,dx.$

2271. $\int_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x}\,dx.$

2272. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

2273. $\int_{0}^{1} x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx.$

2274. $\int_{0}^{3} \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx.$

2275. $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

2276. $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

2277. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 2x\sin 3x\,dx.$

2278. $\int_{0}^{\pi} (x\sin x)^2\,dx.$

2279. $\int_{0}^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx.$

2280. $\int_{0}^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x\,dx.$

Să se calculeze, cu ajutorul formulelor de recurenţă, integralele care depind de parametrul n, atunci cînd acesta ia valori pozitive întregi:

2281. $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$

2282. $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$

2283. $I_n=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x\,dx.$

2284. $I_n=\int_{0}^{1} (1-x^2)^n\,dx.$

2285. $I_n=\int_{0}^{1} \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

2286. $I_n=\int_{0}^{1} x^m(\ln x)^n\,dx.$

2287. $I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx.$

Dacă $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ este o funcţie complexă de variabilă reală x, unde $f_1(x)=\operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x)=\operatorname{Im} f(x)$ şi $i=\sqrt{-1}$, atunci prin definiţie punem

$$\int f(x)\,dx=\int f_1(x)\,dx+i\int f_2(x)\,dx.$$

Avem evident

$$\operatorname{Re}\int f(x)\,dx=\int \operatorname{Re} f(x)\,dx$$

şi

$$\operatorname{Im}\int f(x)\,dx=\int \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

2288. Să se arate, folosind formula lui Euler

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

că

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx=\begin{cases}0, & \text{dacă } m\neq n,\\ 2\pi, & \text{dacă } m=n\end{cases}$$

(n şi m fiind numere întregi).

2289. Să se arate că

$$\int\limits_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}\,dx=\frac{e^{b(\alpha+i\beta)}-e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

(α şi β fiind constante).

Să se calculeze, folosind formulele lui Euler

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}),$$

următoarele integrale (m şi n sînt numere întregi pozitive):

2290. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx.$

2291. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$

2292. $\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$

2294. $\int\limits_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\,dx.$

2293. $\int\limits_0^{\pi}\cos^n x\cos nx\,dx.$

Să se calculeze integralele (n fiind un număr natural):

2295. $\int\limits_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\,dx.$

2296. $\int\limits_0^{\pi}\cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx.$

2297. $\int\limits_0^{2\pi}e^{-ax}\cos^{2n}x\,dx.$

2298. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\cdot\cos 2nx\,dx.$

2299. Aplicînd de cîteva ori succesiv metoda integrării prin părţi, să se calculeze *integrala lui Euler:* $B(m,n)=\int\limits_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$, unde m şi n sînt numere întregi pozitive.

2300. *Polinomul lui Legendre* $P_n(x)$ este definit de următoarea formulă: $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$ $(n=0, 1, 2,\ldots)$.

Să se demonstreze că

$$\int\limits_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & \text{dacă } m\neq n,\\ \frac{2}{2n+1}, & \text{dacă } m=n.\end{cases}$$

2301. Să presupunem că funcţia $f(x)$ este (propriu) integrabilă pe $[a, b]$ şi că $F(x)$ este o astfel de funcţie încît $F'(x)=f(x)$ peste tot în $[a, b]$, exceptînd poate un număr finit de puncte interioare $c_i\,(i=1,\ldots,p)$ şi punctele a şi b, unde funcţia $F(x)$ are discontinuităţi de prima speţă (primitivă generalizată). Să se demonstreze că

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

2302. Să presupunem că funcţia $f(x)$ este (propriu) integrabilă pe segmentul $[a, b]$ şi că

$$F(x)=C+\int_a^x f(x)\,d\xi$$

este integrala ei nedefinită.

Să se demonstreze că funcţia $F(x)$ este continuă şi că în toate punctele în care funcţia $f(x)$ este continuă are loc egalitatea

$$F'(x)=f(x).$$

Ce se poate spune despre derivata funcţiei $F(x)$ în punctele de discontinuitate ale funcţiei $f(x)$?

Să se studieze exemplele:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right)=1$ $(n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ şi $f(x)=0$ pentru $x\neq\frac{1}{n}$;

b) $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

Să se calculeze integralele nedefinite ale funcţiilor mărginite şi discontinue:

2303. $\int \operatorname{sgn} x\,dx$.

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx$.

2305. $\int [x]\,dx$ $(x\geq 0)$.

2306. $\int x[x]\,dx$ $(x\geq 0)$.

2307. $\int (-1)^{[x]}dx$.

2308. $\int_0^x f(x)\,dx$, unde $f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } |x|<l,\\ 0, & \text{dacă } |x|>l.\end{cases}$

Să se calculeze integralele definite ale funcţiilor mărginite şi discontinue:

2309. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx$.

2310. $\int_0^2 [e^x]\,dx$.

2311. $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\,dx$.

2312. $\int_0^\pi x\operatorname{sgn}(\cos x)\,dx$.

2313. $\int_1^{n+1} \ln[x]\,dx$, unde n este un număr natural.

2314. $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\,dx$.

2315. Să se calculeze $\int_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$, unde E este mulţimea acelor valori ale segmentului $[0, 4\pi]$ pentru care expresia de sub semnul integrală are sens.

§ 3. Teoremele mediei

1°. Valoarea medie a unei funcţii. Numărul

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

se numeşte *valoarea medie* a funcţiei $f(x)$ în intervalul $[a, b]$.

Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, atunci există un număr $c\in(a, b)$ astfel încît

$$M[f]=f(c).$$

2°. Prima teoremă a mediei. Dacă: 1) funcţiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sînt mărginite şi integrabile pe segmentul $[a, b]$; 2) funcţia $\varphi(x)$ nu schimbă semnul pentru $a<x<b$, atunci

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\mu\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

unde $m\leq\mu\leq M$ şi $m=\inf\limits_{a<x<b} f(x)$, $M=\sup\limits_{a<x<b} f(x)$; 3) dacă în plus funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, b]$, atunci $\mu=f(c)$, unde $a\leq c\leq b$.

3°. A doua teoremă a mediei. Dacă: 1) funcţiile $f(x)$ şi $\varphi(x)$ sînt mărginite şi integrabile pe segmentul $[a, b]$; 2) funcţia $\varphi(x)$ este monotonă pentru $a<x<b$, atunci

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx,$$

unde $a\leq\xi\leq b$; 3) dacă în plus funcţia $\varphi(x)$ este monoton descrescătoare (în sens larg) şi nenegativă, atunci

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\,dx \qquad (a\leq\xi\leq b);$$

3') dacă funcţia $\varphi(x)$ este monoton crescătoare (în sens larg) şi nenegativă, atunci

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx=\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\,dx \qquad (a\leq\xi\leq b).$$

2316. Să se determine semnele următoarelor integrale definite:

a) $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x\,dx$; c) $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$;

b) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$; d) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 \ln x\,dx$.

2317. Care din integralele de mai jos este mai mare.

a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\,dx$ sau $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$?

b) $\int\limits_0^1 e^{-x}\,dx$ sau $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$?

c) $\int\limits_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ sau $\int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$?

2318. Să se determine valorile medii ale funcţiilor de mai jos în intervalele indicate:

a) $f(x)=x^2$ în $[0,\ 1]$;

b) $f(x)=\sqrt{x}$ în $[0,\ 100]$;

c) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ în $[0,\ 2\pi]$;

d) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ în $[0,\ 2\pi]$.

2319. Să se calculeze valoarea medie a lungimii razei vectoare focale pentru elipsa

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\qquad (0<\varepsilon<1).$$

2320. Să se calculeze valoarea medie a vitezei corpului care cade liber, viteza sa iniţială fiind v_0.

2321. Intensitatea unui curent alternativ variază după legea

$$i=i_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right),$$

unde i_0 este amplitudinea, t—timpul, T—perioada şi φ—faza iniţială. Să se calculeze valoarea medie a pătratului intensităţii curentului.

2322. Fie

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt=xf(\theta x).$$

Să se calculeze θ, dacă:

a) $f(t)=t^n$ $(n>-1)$;
b) $f(t)=\ln t$;
c) $f(t)=e^t$.

Care este valoarea lui $\lim\limits_{x\to 0}\theta$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$?

Să se evalueze integralele, folosind prima teoremă a mediei:

2323. $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$.

2324. $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

2325. $\int\limits_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}\,dx$.

2326. Să se demonstreze egalităţile:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=0$.

2327. Să presupunem că $f(x)$ este o funcţie continuă pe $[a,\ b]$, $\varphi(x)$ este continuă pe $[a,\ b]$ şi derivabilă în $(a,\ b)$ şi că, în plus, avem:

$$\varphi'(x)\geq 0\quad\text{pentru}\quad a<x<b.$$

Să se demonstreze a doua teoremă a mediei aplicînd o integrare prin părţi şi folosind prima teoremă a mediei.

Să se evalueze, folosind a doua teoremă a mediei, integralele:

2328. $\int\limits_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

2329. $\int\limits_a^b\frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x\,dx$ $(\alpha\geq 0;\ 0<a<b)$.

2330. $\int\limits_a^b \sin x^2\,dx$ $(0<a<b)$.

2331. Să presupunem că funcţiile $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ sînt integrabile în intervalul $[a, b]$ împreună cu pătratele lor. Să se demonstreze *inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski*

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \int_a^b \psi^2(x)\,dx.$$

2332. Fie o funcţie $f(x)$ continuu derivabilă pe segmentul $[a, b]$ şi $f(a)=0$.

Să se demonstreze inegalitatea

$$M^2 \leq (b-a)\int_a^b f'^2(x)\,dx,$$

unde

$$M = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x)|.$$

2333. Să se demonstreze egalitatea

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{n+p} \frac{\sin x}{x}\,dx = 0 \quad (p>0).$$

§ 4. Integrale improprii

1°. Integrabilitatea improprie a funcţiilor. Dacă funcţia $f(x)$ este integrabilă în orice interval finit (a, b), punem prin definiţie

$$\int_a^{+\infty} f(dx) = x \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Dacă funcţia $f(x)$ nu este mărginită în vecinătatea punctului b şi este integrabilă în fiecare interval $(a, b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$, punem

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Dacă limitele (1) sau (2) există, spunem că integrala respectivă este *convergentă*, în caz contrar spunem că integrala este *divergentă*.

2°. Criteriul lui Cauchy. Pentru ca integrala (1) să fie convergentă este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon>0$ să existe un număr $b=b(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $b'>b$ şi $b''>b$ să fie satisfăcută inegalitatea

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

In mod analog se formulează criteriul lui Cauchy pentru integrala de tipul (2).

3°. Criterii de convergenţă absolută. Dacă $|f(x)|$ este impropriu integrabilă, integrala corespunzătoare (1) sau (2) a funcţiei $f(x)$ se numeşte *absolut convergentă* şi este evident o integrală convergentă.

Criteriul comparaţiei. I. Fie $|f(x)| \leq F(x)$ pentru $x \geq a$.

Dacă $\int_a^{+\infty} F(x)\,dx$ este convergentă, integrala $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ este absolut convergentă.

Criteriul comparaţiei. II. Dacă $\psi(x)>0$ şi $\varphi(x)=O^*(\psi(x))$ pentru $x\to+\infty$, atunci integralele $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ şi $\int_a^{+\infty} \psi(x)\,dx$ au aceeaşi natură. In particular, aceasta are loc dacă $\varphi(x)\sim\psi(x)$ pentru $x\to+\infty$.

Criteriul comparaţiei III. a) Fie

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right) \quad \text{pentru} \quad x\to+\infty.$$

In cazul acesta integrala (1) este convergentă dacă $p>1$ şi este divergentă dacă $p\leq 1$.

b) Fie

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{(b-x)^p}\right) \quad \text{pentru} \quad x\to b-0.$$

In cazul acesta integrala (2) este convergentă dacă $p<1$ şi este divergentă dacă $p\geq 1$.

4°. Un criteriu special de convergenţă. Dacă: 1) funcţia $\varphi(x)$ tinde monoton către zero pentru $x\to+\infty$ şi 2) funcţia $f(x)$ are o primitivă mărginită

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi,$$

atunci integrala

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

este convergentă, în genere însă, nu absolut convergentă.

In particular, integralele

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx \quad \text{şi} \quad \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx \qquad (a>0)$$

sînt convergente dacă $p>0$.

5°. **Valoarea principală în sensul lui Cauchy.** Dacă funcția $f(x)$ se bucură de proprietatea că pentru orice $\varepsilon>0$ există integralele

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{și} \quad \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \qquad (a<c<b),$$

vom înțelege prin *valoarea principală în sensul lui Cauchy* (v. p.) numărul

$$\text{v. p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right].$$

In mod analog,

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$

Să se calculeze integralele:

2334. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(a>0)$.

2335. $\int_0^1 \ln x\,dx$.

2336. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

2337. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2338. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$.

2339. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

2340. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

2341. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

2342. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

2343. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

2344. $\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1-x^2)^2}\,dx$.

2345. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$.

2346. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$ $(a>0)$.

2347. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$ $(a>0)$.

Să se calculeze, cu ajutorul formulelor de recurență, următoarele integrale improprii (n fiind un număr natural):

2348. $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$.

2349. $I_n=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}$ $(ac-b^2>0)$.

2350. $I_n=\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

2351. $I_n=\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

2352. $I_n=\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}$.

2353. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx$.

2354. Să se calculeze

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}\,dx,$$

unde E este mulțimea valorilor lui x din intervalul $(0, +\infty)$, pentru care expresia de sub semnul integrală are sens.

2355. Să se demonstreze egalitatea

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f\left(\sqrt{x^2+4ab}\right)dx,$$

unde $a>0$ și $b>0$, presupunînd că integrala din membrul al doilea al egalității are sens.

2356. *Numim valoare medie a funcției* $f(x)$ în intervalul $(0, +\infty)$ numărul

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)\,d\xi.$$

Să se calculeze valorile medii ale următoarelor funcţii:

a) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2(x\sqrt{2})$;

b) $f(x)=\operatorname{arctg} x$; c) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

2357. Să se calculeze:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\int\limits_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha}\int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt$.

unde $\alpha>0$ şi $f(t)$ este o funcţie continuă pe segmentul $[0, 1]$.

Să se studieze convergenţa integralelor:

2358. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{x^4-x^2+1}$.

2359. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

2360. $\int\limits_0^2\frac{dx}{\ln x}$.

2361. $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$.

2362. $\int\limits_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}\,dx$.

2363. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}\,dx \quad (n\geq 0)$.

2364. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} ax}{x^n}\,dx \quad (a\neq 0)$.

2365. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}\,dx$.

2366. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^m\operatorname{arctg} x}{2+x^n}\,dx \quad (n\geq 0)$.

2367. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx \quad (n\geq 0)$.

2368. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\,dx$.

2369. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$.

2370. $\int\limits_0^1\frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

2371. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$.

2372. $\int\limits_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\,dx$.

2373. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

2374. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$.

2375. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$.

2376. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\ldots|x-a_n|^{p_n}}$.

2377. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,dx$, unde $P_m(x)$ şi $P_n(x)$ sînt polinoame prime între ele, avînd respectiv gradele m şi n.

Să se studieze convergenţa absolută şi convergenţa simplă a următoarelor integrale:

2378. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$.

Indicaţie. $|\sin x|\geq\sin^2 x$.

2379. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}\,dx$.

2380. $\int\limits_0^{+\infty} x^p\sin(x^q)\,dx \quad (q\neq 0)$.

2381. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\,dx \quad (q\geq 0)$.

2382. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\,dx$.

2383. $\int\limits_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$,

unde $P_m(x)$ şi $P_n(x)$ sînt polinoame întregi şi $P_n(x)>0$ dacă $x\geq 0$.

2384. Din convergenţa integralei $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ rezultă oare neapărat că $f(x)\to 0$ pentru $x\to+\infty$?

Să se studieze exemplele:

a) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$; b) $\int\limits_{0}^{+\infty} (-1)^{[x^2]}\,dx$.

2385. Putem considera oare integrala improprie convergentă

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$

a unei funcţii nemărginite $f(x)$, definită pe $[a, b]$, ca fiind limita sumei integrale corespunzătoare

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

unde $x_i \leqq \xi_i \leqq x_{i+1}$ şi $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$?

2386. Să presupunem că

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (1)$$

este convergentă şi că funcţia $\varphi(x)$ este mărginită.

Rezultă oare de aici convergenţa integralei

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx? \qquad (2)$$

Să se dea un exemplu.

Ce se poate spune despre convergenţa integralei (2) dacă integrala (1) este absolut convergentă?

2387. Să se demonstreze că dacă $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă şi $f(x)$ este o funcţie monotonă, atunci $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

2388. Să presupunem că funcţia $f(x)$ este monotonă în intervalul $0 < x \leqq 1$ şi că nu este mărginită în vecinătatea punctului $x = 0$. Să se demonstreze că dacă există

$$\int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx,$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx.$$

2389. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ este monotonă în intervalul $0 < x < a$ şi există

$$\int\limits_{0}^{a} x^p f(x)\,dx,$$

atunci

$$\lim_{x\to 0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

2390. Să se arate că

a) v. p. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = 0$; b) v. p. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0$;

c) v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx = 0$.

2391. Să se demonstreze că pentru $x \geqq 0$ există

$$\text{li}\, x = \text{v. p.} \int\limits_{0}^{x} \frac{d\xi}{\ln \xi}.$$

Să se calculeze următoarele integrale:

2392. v. p. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

2393. v. p. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$.

2394. v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$.

2395. v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$.

§ 5. Calculul ariilor

1°. Expresia ariei în coordonate rectangulare. Aria $S = A_1A_2B_2B_1$ (fig. 10), mărginită de curbele continue $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $(y_2(x) \geqq y_1(x))$ şi de dreptele $x = a$, $x = b$ este egală cu

$$S = \int\limits_{a}^{b} [y_2(x) - y_1(x)]\,dx.$$

2°. **Expresia ariei mărginită de o curbă dată sub formă parametrică.** Dacă $x=x(t)$, $y=y(t)$ $[0\leq t\leq T]$ sînt ecuațiile parametrice ale unei curbe C simple, închise, netede pe porțiuni, lăsînd la stînga aria S (fig. 11), atunci

$$S=-\int_0^T y(t)\,x'(t)\,dt=\int_0^T x(t)\,y'(t)\,dt,$$

sau

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)\,y'(t)-x'(t)\,y(t)]\,dt.$$

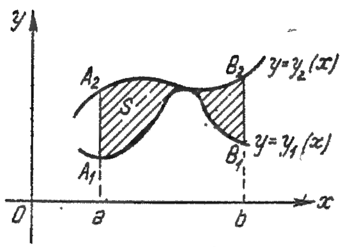

Fig. 10

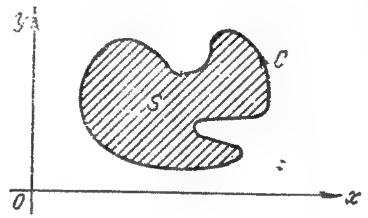

Fig. 11

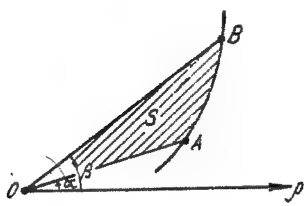

Fig. 12

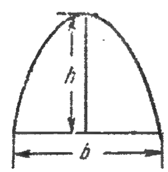

Fig. 13

3°. **Expresia ariei în coordonate polare.** Aria $S=OAB$ (fig. 12), mărginită de curba continuă $r=r(\varphi)$ și de două semidrepte $\varphi=\alpha$ și $\varphi=\beta$, este egală cu

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

2396. Să se demonstreze că aria segmentului drept al parabolei este egală cu

$$S=\frac{2}{3}bh,$$

unde b este baza și h înălțimea segmentului (fig. 13).

Să se calculeze ariile mărginite de următoarele curbe date în coordonate rectangulare[1]:

2397. $ax=y^2,\quad ay=x^2.$

2398. $y=x^2,\quad x+y=2.$

2399. $y=2x-x^2,\quad x+y=0.$

2400. $y=|\lg x|,\quad y=0,\quad x=0{,}1,\quad x=10.$

2401. $y=x;\quad y=x+\sin^2 x\qquad (0\leq x\leq\pi).$

2402. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2},\qquad y=0.$

2403. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

2404. $y^2=x^2(a^2-x^2).$

2405. $y^2=2px,\quad 27py^2=8(x-p)^3.$

2406. $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1\qquad (AC-B^2>0),$

2407. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$ (cisoidă), $x=2a.$

2408. $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2},\quad y=0$ (tractrice).

2409. $y^2=\dfrac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}\qquad (x>0;\ n>-2).$

2410. $y=e^{-x}\sin x,\quad y=0\quad (x\geq 0).$

2411. In ce raport împarte parabola $y^2=2x$ aria cercului $x^2+y^2=8$?

2412. Să se exprime coordonatele punctului $M(x, y)$ de pe hiperbola $x^2-y^2=a^2$ în funcție de aria sectorului hiperbolic

[1]) In acest paragraf, cum și în celelalte paragrafe ale cap. IV, vom considera toți parametrii pozitivi.

$S=OM'M$, mărginit de arcul hiperbolei $M'M$ şi de două raze OM şi OM', unde $M'(x, -y)$ este punctul simetric lui M faţă de axa Ox.

Să se calculeze ariile mărginite de curbele scrise sub formă parametrică:

2413. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ (cicloidă) şi $y=0$.

2414. $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$.

2415. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ (desfăşurata cercului) şi $x=a$, $y\leq 0$.

2416. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

2417. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2=a^2-b^2)$, (evoluta elipsei).

Să se calculeze ariile S, mărginite de curbele scrise în coordonate polare:

2418. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ (lemniscata).

2419. $r=a(1+\cos\varphi)$ (cardioidă).

2420. $r=a\sin 3\varphi$ (roza cu trei foi).

2421. $r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$ (parabolă), $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

2422. $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$ (elipsă).

2423. $r=a\cos\varphi$, $r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$ $\left(M\left(\frac{a}{2}, 0\right)\in S\right)$.

2424. Să se calculeze aria sectorului mărginit de curba

$$\varphi=r\operatorname{arctg} r$$

şi de razele $\varphi=0$ şi $\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

2425. Să se calculeze aria mărginită de curba închisă

$$r=\frac{2at}{1+t^2},\quad \varphi=\frac{\pi t}{1+t}.$$

Să se calculeze, trecînd la coordonate polare, ariile mărginite de curbele:

2426. $x^3+y^3=3axy$ (foliul lui Descartes).

2427. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

2428. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ (lemniscata).

Aducînd ecuaţiile la forma parametrică, să se calculeze ariile mărginite de curbele:

2429. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (astroidă).

2430. $x^4+y^4=ax^2y$.

Indicaţie. Se va pune $y=tx$.

§ 6. Calculul lungimilor arcelor

1°. **Expresia lungimii unui arc de curbă în coordonate rectangulare.** Lungimea unui segment de arc al unei curbe netede (continuu derivabile)

$$y=y(x)\quad (a\leq x\leq b)$$

este egală cu

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

2°. **Expresia lungimii unui arc de curbă scrisă sub forma parametrică.** Dacă curba C este dată de ecuaţiile

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad (t_0\leq t\leq T),$$

unde funcţiile $x(t)$, $y(t)$ sînt continuu derivabile pe segmentul $[t_0, T]$, lungimea arcului de curbă C este egală cu

$$x=\int_{t_0}^{T}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

3°. **Expresia lungimii unui arc de curbă în coordonate polare.** Dacă

$$r=r(\varphi)\quad (\alpha\leq\varphi\leq\beta),$$

unde funcţia $r(\varphi)$ este continuă împreună cu derivata sa $r'(\varphi)$ pe segmentul $[\alpha, \beta]$, lungimea arcului de curbă corespunzător este egală cu

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

Despre lungimile arcelor curbelor strîmbe v. în cap. VIII.

Să se calculeze lungimile arcelor următoarelor curbe:

2431. $y=x^{\frac{3}{2}}$ $(0\leq x\leq 4)$.

2432. $y^2=2px$ $(0\leq x\leq x_0)$.

2433. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ de la punctul $A(0, a)$ pînă la punctul $B(b, h)$.

2434. $y=e^x$ $(0\leq x\leq x_0)$.

2435. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ $(1\leq y\leq e)$.

2436. $y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}$ $(0\leq x\leq b<a)$.

2437. $y=\ln\cos x$ $\left(0\leq x\leq a<\frac{\pi}{2}\right)$.

2438. $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ $(0<b\leq y\leq a)$.

2439. $y^2=\frac{x^2}{2a-x}$ $\left(0\leq x\leq\frac{5}{3}a\right)$.

2440. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (astroidă).

2441. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2=a^2-b^2$ (evoluta elipsei).

2442. $x=a\cos^4 t$, $y=a\sin^4 t$.

2443. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$.

2444. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ pentru $0\leq t\leq 2\pi$ (desfăşurata cercului).

2445. $x=a(\operatorname{sh}t-t)$, $y=a(\operatorname{ch}t-1)$ $(0\leq t\leq T)$.

2446. $r=a\varphi$ (spirala lui Arhimede) pentru $0\leq\varphi\leq 2\pi$.

2447. $r=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ pentru $0<r<a$.

2448. $r=a(1+\cos\varphi)$.

2449. $r=\frac{p}{1+\cos\varphi}$ $\left(|\varphi|\leq\frac{\pi}{2}\right)$.

2450. $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

2451. $r=a\operatorname{th}\frac{\varphi}{2}$ $(0\leq\varphi\leq 2\pi)$.

2452. $\varphi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ $(1\leq r\leq 3)$.

2453. Să se demonstreze că lungimea arcului elipsei

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

este egală cu lungimea unei unde sinusoidale $y=c\sin\frac{x}{b}$, unde $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

2454. Parabola $4ay=x^2$ se rostogoleşte pe axa Ox. Să se demonstreze că focarul parabolei descrie lănţişorul.

2455. Să se determine raportul dintre aria mărginită de bucla curbei

$$y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}$$

şi aria cercului al cărui contur are aceeaşi lungime ca şi conturul curbei.

§ 7. Calculul volumelor

1°. **Expresia volumului unui corp atunci cînd se cunosc secţiunile sale transversale.** Dacă volumul V al unui corp există şi $S=S(x)$ $[a\leq x\leq b]$ este aria secţiunii corpului determinată de planul perpendicular pe axa Ox în punctul x, atunci

$$V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

2°. **Volumul unui corp de rotaţie.** Volumul corpului format prin rotaţia în jurul axei Ox a suprafeţei

$$a\leq x\leq b,\quad 0\leq y\leq y(x),$$

unde $y(x)$ este o funcţie uniformă şi continuă, este egal cu

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx.$$

În cazul mai general avem pentru volumul corpului format prin rotaţia în jurul axei Ox a suprafeţei $a\leq x\leq b$, $y_1(x)\leq y\leq y_2(x)$, unde $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ sînt funcţii continue nenegative, expresia

$$V=\pi\int_a^b[y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,dx.$$

2456. Să se calculeze volumul unui pod a cărui bază este un dreptunghi de laturi a şi b, a cărui muchie superioară este c şi a cărui înălţime este h.

2457. Să se calculeze volumul obeliscului ale cărui baze paralele sînt dreptunghiuri cu laturile A, B şi a, b şi a cărui înălţime este h.

2458. Să se calculeze volumul trunchiului de con ale cărui baze sînt elipse cu semiaxele A, B şi a, b şi a cărui înălţime este h.

2459. Să se calculeze volumul paraboloidului de rotaţie a cărui bază este S şi a cărui înălţime este H.

2460. Să presupunem că aria $S=S(x)$ a secţiunii transversale, perpendiculară pe axa O_x, care se duce printr-un corp al cărui volum poate fi calculat, variază după legea pătratică

$$S(x)=Ax^2+Bx+C \qquad [a\leq x\leq b],$$

unde A, B şi C sînt constante.

Să se demonstreze că volumul acestui corp este egal cu

$$V=\frac{H}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$

unde $H=b-a$ *(formula lui Simpson)*.

2461. Să presupunem că un corp este alcătuit din mulţimea punctelor $M(x, y, z)$, pentru care $0\leq z\leq 1$, iar $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$, dacă z este raţional, şi $-1\leq x\leq 0$, $-1\leq y\leq 0$, dacă z este iraţional. Să se demonstreze că volumul acestui corp nu există, deşi integrala corespunzătoare are valoarea

$$\int_0^1 S(z)\,dz=1.$$

Să se calculeze volumele corpurilor mărginite de următoarele suprafeţe:

2462. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=\frac{c}{a}x, \quad z=0.$

2463. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (elipsoid)

2464. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad z=\pm c.$

2465. $x^2+z^2=a^2, \quad y^2+z^2=a^2.$

2466. $x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2=ax.$

2467. $z^2=b(a-x), \quad x^2+y^2=ax.$

2468. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{z^2}=1 \quad (0<z<a).$

2469. $x+y+z^2=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$

2470. $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2.$

2471. Să se demonstreze că volumul corpului format prin rotaţia în jurul axei Oy a suprafeţei

$$a\leq x\leq b, \quad 0\leq y\leq y(x),$$

$y(x)$ fiind o funcţie continuă şi uniformă, este

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)\,dx.$$

Să se calculeze volumele corpurilor mărginite de suprafeţele obţinute rotind următoarele curbe:

2472. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0\leq x\leq a)$ (neiloid) în jurul axei Ox.

2473. $y=2x-x^2$, $y=0$: a) în jurul axei Ox; b) în jurul axei Oy.

2474. $y=\sin x$, $y=0$ $(0\leq x\leq \pi)$: a) în jurul axei Ox: b) în jurul axei Oy.

2475. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y=b\left|\frac{x}{a}\right|$: a) în jurul axei Ox; b) în jurul axei Oy.

2476. $y=e^{-x}$, $y=0$ $(0\leq x<+\infty)$: a) în jurul axei Ox; b) în jurul axei Oy.

2477. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a\leq b)$ în jurul axei Ox.

2478. $x^2-xy+y^2=a^2$ în jurul axei Ox.

2479. $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(0\leq x<+\infty)$ în jurul axei Ox.

2480. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$, $y=0$: a) în jurul axei Ox; b) în jurul axei Oy; c) în jurul dreptei $y=2a$.

2481. $x=a\sin^3 t$, $y=b\cos^3 t$ $(0\leq t\leq 2\pi)$: a) în jurul axei Ox; b) în jurul axei Oy.

2482. Să se demonstreze că volumul corpului format rotind în jurul axei polare suprafaţa

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r(\varphi)$$

(φ şi r fiind coordonatele polare), este

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Să se calculeze volumele corpurilor care iau naştere prin rotaţia suprafeţelor de mai jos, date în coordonate polare:

2483. $r = a(1+\cos\varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$: a) în jurul axei polare; b) în jurul dreptei $r \cos \varphi = -\frac{a}{4}$.

2484. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$: a) în jurul axei Ox; b) în jurul axei Oy; c) în jurul dreptei $y=x$.

Indicaţie. Se va trece la coordonate polare.

2485. Să se calculeze volumul corpului format prin rotaţia suprafeţei

$$a \leq r \leq a\sqrt{2 \sin 2\varphi}$$

în jurul axei polare.

§ 8. Calculul ariilor suprafeţelor de rotaţie

Aria suprafeţei, obţinută prin rotirea unei curbe netede AB în jurul axei Ox, este

$$P = 2\pi \int_{A}^{B} y\, ds,$$

unde ds este diferenţiala arcului.

Să se calculeze ariile suprafeţelor obţinute rotind următoarele curbe:

2486. $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}$ $(0 \leq x \leq a)$ în jurul axei Ox.

2487. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ $(|x| \leq b)$ în jurul axei Ox.

2488. $y = \operatorname{tg} x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$ în jurul axei Ox.

2489. $y^2 = 2px$ $(0 \leq x \leq x_0)$: a) în jurul axei Ox; b) în jurul axei Oy.

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b \leq a)$: a) în jurul axei Ox; b) în jurul axei Oy.

2491. $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(b \geq a)$ în jurul axei Ox.

2492. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ în jurul axei Ox.

2493. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ $(|x| \leq b)$: a) în jurul axei Ox; în jurul axei Oy.

2494. $\pm x = a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}$ în jurul axei Ox.

2495. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$: a) în jurul axei Ox; b) în jurul axei Oy; c) în jurul dreptei $y = 2a$.

2496. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ în jurul dreptei $y = x$.

2497. $r = a(1+\cos\varphi)$ în jurul axei polare.

2498. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$: a) în jurul axei polare; b) în jurul axei $\varphi = \frac{\pi}{2}$; c) în jurul axei $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2499. Un corp este obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a figurii mărginite de parabola $ay = a^2 - x^2$ şi de axa Ox. Să se calculeze raportul dintre suprafaţa corpului de rotaţie şi suprafaţa sferei echivalente.

2500. Figura mărginită de parabola $y^2 = 2px$ şi de dreapta $x = \frac{p}{2}$ se roteşte în jurul dreptei $y = p$. Să se calculeze volumul şi suprafaţa corpului de rotaţie.

§ 9. Calculul momentelor. Coordonatele centrului de greutate

1°. Momente. Dacă masa M de densitatea $\rho = \rho(y)$ umple un anumit continuum mărginit Ω din planul Oxy (o linie, un domeniu plan) şi dacă $\omega = \omega(y)$ este măsura corespunzătoare (lungimea arcului, aria) a acelei părţi din domeniul Ω, ordonatele căreia nu depăşesc pe y, atunci *momentul de ordinul* k al masei M în raport cu axa Ox se numeşte numărul

$$M_k = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(y_i)\, y_i^k\, \Delta\omega(y_i) = \int_{\Omega} \rho y^k\, d\omega(y) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

In particular, pentru $k=0$ avem *masa* M, pentru $k=1$ avem *momentul static*, pentru $k=2$ — *momentul de inerţie*.

In mod analog se definesc momentele masei faţă de planele de coordonate.

Dacă $\rho=1$, momentul corespunzător se numeşte *momentul geometric* (momentul liniei, ariei, volumului etc.).

2°. Centru de greutate. Coordonatele centrului de greutate (x_0, y_0) al unei figuri plane omogene S sînt date de formulele

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S}, \quad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

unde $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ sînt momentele statice geometrice ale ariei S în raport cu axele Oy şi Ox.

2501. Să se calculeze momentul static şi momentul de inerţie al arcului de semicerc de rază a, în raport cu diametrul care trece prin extremităţile acestui arc.

2502. Să se calculeze momentul static şi momentul de inerţie al unei plăci triunghiulare omogene avînd baza b şi înălţimea h, în raport cu baza ($\rho=1$).

2503. Să se calculeze momentele de inerţie ale unei plăci eliptice omogene cu semiaxele a şi b în raport cu axele ei principale ($\rho=1$).

2504. Să se calculeze momentul static şi momentul de inerţie al unui con circular omogen avînd raza bazei r şi înălţimea h, în raport cu planul bazei acestui con ($\rho=1$).

2505. Să se demonstreze prima teoremă a lui Guldin: aria suprafeţei obţinută rotind arcul C în jurul unei axe care n-are puncte comune cu C este egală cu lungimea acestui arc înmulţită cu lungimea cercului descris de centrul de greutate al arcului C.

2506. Să se demonstreze a doua teoremă a lui Guldin: volumul corpului obţinut rotind suprafaţa S în jurul unei axe care n-o intersectează, este egal cu produsul dintre aria S şi lungimea cercului descris de centrul de greutate al acestei suprafeţe.

2507. Să se determine coordonatele centrului de greutate al arcului de cerc: $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$ $(|\varphi|\leq\alpha\leq\pi)$.

2508. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeţei mărginite de parabolele $ax=y^2$, $ay=x^2$ $(a>0)$.

2509. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeţei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ $(0\leq x\leq a,\ 0\leq y\leq b)$.

2510. Să se determine centrul de greutate al unei emisfere omogene de rază a.

2511. Să se determine coordonatele centrului de greutate $C(\varphi_0, r_0)$ al arcului OP de pe spirala logaritmică $r=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ de la punctul $O(-\infty, 0)$ pînă la punctul $P(\varphi, r)$. Care este locul geometric al punctului C cînd punctul P se mişcă pe curbă?

2512. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeţei mărginite de curba $r=a(1+\cos\varphi)$.

2513. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeţei mărginite de primul arc al cicloidei $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ şi de axa Ox.

2514. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al corpului care ia naştere prin rotaţia suprafeţei $0\leq x\leq a$; $y^2\leq 2px$ în jurul axei Ox.

2515. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al emisferei $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0)$.

§ 10. Probleme din mecanică şi fizică

Să se rezolve următoarele probleme, construind sumele integrale corespunzătoare şi determinînd limitele lor.

2516. Să se calculeze masa unei bare de lungime $l=10$ m, dacă densitatea liniară a barei variază după legea $\delta=6+0{,}3\,x$ kg/m, unde x este distanţa de la una din extremităţile barei.

2517. Ce lucru mecanic trebuie cheltuit pentru a ridica un corp de masă m la înălţimea h deasupra pămîntului, considerînd că raza pămîntului este R? Care este valoarea acestui lucru mecanic, dacă corpul se depărtează spre infinit?

2518. Care este lucrul mecanic pe care-l cheltuim pentru a întinde o vargă elastică cu 10 cm, dacă forţa de 1 kg întinde această vargă cu 1 cm?

Indicaţie. Se va folosi legea lui Hooke.

2519. Un cilindru de diametru 20 cm şi lungime 80 cm este umplut cu vapori sub presiune de 10 kg/cm². Ce lucru mecanic trebuie să cheltuim pentru a micşora volumul gazului de două ori, considerînd că temperatura gazului rămîne constantă?

2520. Să se determine presiunea apei pe un perete vertical, avînd forma unui semicerc de rază a al cărui diametru se află pe suprafaţa apei.

2521. Să se determine presiunea apei pe un perete vertical, avînd forma unui trapez a cărui bază inferioară este $a=10$ m, baza superioară este $b=6$ m şi înălţimea este $h=5$ m, dacă nivelul de scufundare al bazei mari este $c=20$ m.

Formînd ecuaţiile diferenţiale corespunzătoare, să se rezolve următoarele probleme:

2522. Viteza unui punct variază după legea:

$$v=v_0+at.$$

Ce drum parcurge acest punct în intervalul $[0, T]$?

2523. O sferă omogenă de rază R şi de densitate δ se roteşte în jurul diametrului său cu viteza unghiulară ω. Să se calculeze energia cinetică a sferei.

2524. Cu ce forţă atrage dreapta materială infinită de densitate liniară constantă egală cu μ_0, un punct material de masă m situat la distanţa a de la această dreaptă?

2525. Să se calculeze cu ce forţă atrage o placă circulară de rază a şi de densitate superficială constantă δ_0 un punct material P de masă m, situat pe perpendiculara la planul plăcii, trecînd prin centrul ei Q, la distanţa cea mai scurtă $\overline{PQ}$ egală cu b.

2526. Conform legii lui Toricelli, viteza de scurgere a unui lichid dintr-un vas este dată de relaţia

$$v=c\sqrt{2gh},$$

unde g este acceleraţia forţei gravitaţionale, h este înălţimea nivelului lichidului deasupra orificiului de scurgere şi $c=0,6$ este un coeficient dedus pe cale experimentală.

In cît timp se goleşte un butoi cilindric vertical de diametru $D=1$ m şi înălţimea $H=2$ m umplut pînă sus cu lichid, dacă acesta se scurge printr-un orificiu circular de diametru $d=1$ cm, aflat pe fundul butoiului.

2527. Ce formă trebuie să aibă un vas, care este un corp de rotaţie, pentru ca scăderea nivelului lichidului prin scurgere să fie uniformă?

2528. Viteza de dezintegrare a radiului este proporţională în fiecare moment cu cantitatea sa existentă. Să se găsească legea după care are loc dezintegrarea radiului, dacă la momentul iniţial $t=0$ am avut Q_0g de radiu, iar peste $T=1600$ ani cantitatea sa scade la jumătate.

2529. Pentru cazul unui proces de ordinul al doilea viteza reacţiei chimice care face ca substanţa A să treacă în substanţa B este proporţională cu produsul concentraţiilor acestor substanţe. Ce procent din substanţa B va fi conţinut în vas peste $t=1$ oră, dacă pentru $t=0$ minute am avut 20% din substanţa B, iar pentru $t=15$ minute am avut 80% din B?

2530. Conform legii lui Hooke, alungirea relativă ε a unei bare este proporţională cu tensiunea forţei σ în secţiunea transversală respectivă, adică

$$\varepsilon=\frac{\sigma}{E},$$

E fiind modulul lui Young.

Să se calculeze alungirea unei bare grele de formă conică avînd baza încastrată şi vîrful răsturnat în jos, dacă raza bazei este R, înălţimea conului este H, iar greutatea specifică este γ.

§ 11. Calculul prin aproximaţie al integralelor definite

1°. Formula dreptunghiurilor. Dacă funcţia $y=y(x)$ este continuă şi derivabilă de un număr suficient de ori pe segmentul finit $[a, b]$ şi $h=\frac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, $y_i=y(x_i)$, atunci

$$\int_a^b y(x)\,dx=h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})+R_n,$$

unde

$$R_n=\frac{(b-a)^2}{2n}y'(\xi) \qquad (a\leq\xi\leq b).$$

2°. Formula trapezelor. Cu aceleaşi notaţii avem:

$$\int_a^b y(x)\,dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

unde

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi') \qquad (a\leq\xi'\leq b).$$

3°. Formula parabolică (formula lui Simpson). Punînd $n=2k$, obţinem:

$$\int_a^b y(x)\,dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2k-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2k-2})]+R_n,$$

unde

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{IV}(\xi'') \qquad (a \leq \xi'' \leq b).$$

2531. Aplicînd formula dreptunghiurilor ($n=12$), să se caculeze valoarea aproximativă a integralei

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \, dx.$$

şi să se compare rezultatul cu cel exact.

Să se calculeze cu ajutorul formulei trapezelor integralele de mai jos şi să se evalueze erorile lor, dacă:

2532. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n=8)$. **2533.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ $(n=12)$.

2534. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x} \, dx$ $(n=6)$.

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Simpson integralele:

2535. $\int_1^9 \sqrt{x} \, dx$ $(n=4)$. **2537.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ $(n=10)$.

2536. $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x} \, dx$ $(n=6)$. **2538.** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\ln(1+x)}$ $(n=6)$.

2539. Luînd $n=10$, să se calculeze *constanta lui Catalan*

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

2540. Folosind formula

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

să se calculeze numărul π cu 5 zecimale exacte.

2541. Să se calculeze

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

cu 3 zecimale exacte.

2542. Să se calculeze $\int_0^1 (e^x-1)\ln\frac{1}{x} dx$ cu 4 zecimale exacte.

2543. Să se calculeze valoarea aproximativă a *integralei din teoria probabilităţilor*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Indicaţie. Se va pune $x=\frac{t}{1+t}$.

2544. Să se determine valoarea aproximativă a lungimii unei elipse de semiaxe $a=10$ şi $b=6$.

2545. Să se construiască prin puncte graficul funcţiei

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \qquad (0 \leq x \leq 2\pi),$$

luînd

$$\Delta x = \frac{\pi}{3}.$$

CAPITOLUL V

SERII

§ 1. Serii numerice. Criterii de convergență pentru serii cu semn constant

1°. Noțiuni generale. Vom spune că seria numerică

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

este *convergentă* dacă există

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S \qquad \textit{(suma seriei)},$$

unde $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$. In caz contrar vom spune că seria (1) *este divergentă.*

2°. Criteriul lui Cauchy. Pentru ca seria (1) să fie convergentă este necesar și suficient ca pentru orice $\varepsilon>0$ să existe un număr $N=N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n>N$ și $p>0$ să fie satisfăcută inegalitatea

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right|<\varepsilon.$$

In particular, dacă seria este convergentă, avem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0.$$

3°. Criteriul comparației I. Să presupunem că în afară de seria (1) mai avem seria

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots \tag{2}$$

Dacă pentru $n\geq n_0$ este satisfăcută inegalitatea

$$0\leq a_n\leq b_n,$$

atunci 1) din convergența seriei (2) rezultă convergența seriei (1); 2) din divergența seriei (1) rezultă divergența seriei (2).

In particular, dacă $a_n\sim b_n$ pentru $n\to\infty$, seriile cu termeni pozitivi (1) și (2) au aceeași natură.

4°. Criteriul comparației II. Dacă

$\frac{u_n}{v_n}$

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^{1)},$$

atunci a) pentru $p>1$ seria (1) este convergentă și b) pentru $p\leq 1$ este divergentă.

5°. Criteriul lui d'Alembert. Dacă $a_n>0\ (n=1,2,\ldots)$ și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

atunci a) pentru $q<1$ seria (1) este convergentă și (b) pentru $q>1$ seria (1) este divergentă.

6°. Criteriul lui Cauchy. Dacă $a_n\geq 0\ (n=1,2,\ldots)$ și

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

atunci a) pentru $q<1$ seria (1) este convergentă și b) pentru $q>1$ seria (1) este divergentă.

7°. Criteriul lui Raabe. Dacă $a_n>0\ (n=1,2,\ldots)$ și

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

atunci a) pentru $p>1$ seria (1) este convergentă și b) pentru $p<1$ ea este divergentă.

8°. Criteriul lui Gauss. Dacă $a_n>0\ (n=1,2,\ldots)$ și

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

unde $|\theta_n|<C$ și $\varepsilon>0$, atunci a) pentru $\lambda>1$ seria (1) este convergentă și b) pentru $\lambda<1$ ea este divergentă; c) pentru $\lambda=1$ seria (1) este convergentă dacă $\mu>1$ și divergentă dacă $\mu\leq 1$.

9°. Criteriul integral al lui Cauchy. Dacă $f(x)\,(x>0)$ este o funcție nenegativă necrescătoare, atunci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

și integrala

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

sînt sau amîndouă convergente sau amîndouă divergente.

---

1) Semnificația simbolului O^* este dată în cap. I, § 6, 1°.

Să se demonstreze direct convergenţa următoarelor serii şi să se determine sumele lor.

2546. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots$

2547. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$

2548. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$

2549. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2550. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$

2551. a) $q\sin\alpha+q^2\sin 2\alpha+\ldots+q^n\sin n\alpha+\ldots$;

b) $q\cos\alpha+q^2\cos 2\alpha+\ldots+q^n\cos n\alpha+\ldots$ $(|q|<1)$.

2552. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2553. Să se studieze convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$.

Indicaţie. Se va arăta că pentru $x\neq k\pi$ (k fiind întreg) nu este posibil ca $\sin nx\to 0$ pentru $n\to\infty$.

2554. Să se demonstreze că dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă, seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n,\quad \text{unde}\quad A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\qquad (p_1=1,\ p_1<p_2<\ldots),$$

obţinută grupînd termenii seriei date fără a modifica ordinea lor, este şi ea convergentă şi are aceeaşi sumă. Afirmaţia reciprocă nu este adevărată; să se dea un exemplu.

2555. Să se demonstreze că dacă termenii seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sînt pozitivi şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$, obţinută prin gruparea termenilor acestei serii, este convergentă, atunci seria dată este şi ea convergentă.

Să se studieze convergenţa seriilor:

2556. $1-1+1-1+1-1+\ldots$

2557. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots$

2558. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$

2559. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$

2560. $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots$

2561. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\ldots+\frac{n}{2n-1}+\ldots$

2562. $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

2563. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\ldots$

2564. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\ldots$

2565. Să se demonstreze că seria numerelor inverse termenilor unei progresii aritmetice este divergentă.

2566. Să se demonstreze că dacă seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(A)$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\,(B)$ sînt convergente şi $a_n\leq c_n\leq b_n$ $(n=1,2,\ldots)$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(C)$ este şi ea convergentă. Ce se poate spune despre convergenţa seriei (C) dacă seriile (A) şi (B) sînt divergente?

2567. Fie două serii divergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad \text{şi} \quad \sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

cu termeni nenegativi.

Ce se poate spune despre convergenţa seriilor

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\min(a_n,b_n)\quad \text{şi}\quad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\max(a_n,b_n)\,?$$

2568. Să se demonstreze că dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n\geq 0)$ este convergentă, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ este şi ea convergentă. Propoziţia inversă nu este adevărată; să se dea exemple.

2569. Să se demonstreze că dacă seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ sînt convergente, atunci seriile

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

converg şi ele.

2570. Să se demonstreze că dacă

$$\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0,$$

seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

2571. Să se demonstreze că dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni pozitivi şi monoton descrescători este convergentă, atunci

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

2572. Condiţia

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{n+p}) = 0,$$

pentru $p=1, 2, 3, \dots$ implică oare convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

Să se demonstreze, folosind criteriul lui Cauchy, convergenţa următoarelor serii cu termeni pozitivi:

2573. $a_0+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_n}{10^n}+\dots \quad (|a_n|<10).$

2574. $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\dots+\frac{\sin nx}{2^n}+\dots$

2575. $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\dots$

$$\dots+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\dots$$

Să se demonstreze, folosind criteriul lui Cauchy, că următoarele serii sînt divergente:

2576. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$

2577. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots$

Folosind criteriile de comparaţie, criteriul lui d'Alembert sau criteriul lui Cauchy, să se studieze convergenţa următoarelor serii:

2578. $\frac{1000}{1!}+\frac{1000^2}{2!}+\frac{1000^3}{3!}+\dots+\frac{1000^n}{n!}+\dots$

2579. $\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\dots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\dots$

2580. $\frac{1!}{1}+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\dots+\frac{n!}{n^n}+\dots$

2581. a) $\frac{2\cdot 1!}{1}+\frac{2^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{2^3\cdot 3!}{3^3}+\dots+\frac{2^n n!}{n^n}+\dots$;

b) $\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\dots+\frac{3^n n!}{n^n}+\dots$

2582. $\frac{(1!)^2}{2}+\frac{(2!)^2}{2^4}+\frac{(3!)^2}{2^9}+\dots+\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\dots$

2583. $\frac{1000}{1}+\frac{1000\cdot 1001}{1\cdot 3}+\frac{1000\cdot 1001\cdot 1002}{1\cdot 3\cdot 5}+\dots$

2584. $\frac{4}{2}+\frac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\dots$

2585. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\dots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}).$

2586. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$

2587. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$

2588. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$

2589. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$

2590. $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+$

$$+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\dots$$

Indicaţie. $\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}.$

2591. Să se demonstreze că dacă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q \qquad (a_n>0),$$

atunci $a_n=o(q_1^n)$, unde $q_1>q$.

2592. Să se demonstreze că dacă

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1 \qquad (a_n>0),$$

seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă.

Propoziţia inversă nu este adevărată. Să se studieze exemplul

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\dots$$

2593. Să se demonstreze că dacă pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ există

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q, \tag{A}$$

atunci există şi

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q. \tag{B}$$

Propoziţia inversă nu este adevărată: dacă există limita (B), atunci se poate întîmpla ca limita (A) să nu existe. Să se studieze exemplul

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

2594. Să se demonstreze că dacă

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q \qquad (a_n\geq 0),$$

atunci a) pentru $q<1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă; b) pentru $q>1$ această serie este divergentă (criteriul generalizat al lui Cauchy).

Să se studieze convergenţa seriilor:

2595. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

2596. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

2597. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\left[\sqrt{2}+(-1)^n\right]^n}{3^n}$.

Folosind criteriile lui Raabe şi Gauss, să se studieze convergenţa următoarelor serii:

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p+\dots$

2599. $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\dots$ $\qquad(a>0,\ b>0,\ d>0).$

2600. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,e^n}{n^{n+p}}$.

2601. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\dots(2+\sqrt{n})}$.

2602. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,n^{-p}}{q(q+1)\dots(q+n)}$ $\qquad(p>0,\ q>0).$

2603. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$ $\qquad(p>0,\ q>0).$

2604. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

2605. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{x\ln n}{n}\right)^n$ $\qquad(p>0).$

2606. Să se demonstreze că dacă

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

atunci

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right) \qquad (\varepsilon>0).$$

Determinînd ordinul de descreştere al termenului general a_n, să se studieze convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, dacă:

2607. $a_n=\dfrac{n^p+a_1n^{p-1}+\ldots+a_p}{n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b_q}$, unde $n^q+b_1n^{q-1}+\ldots+b_q>0$.

2608. $a_n=\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

2609. $a_n=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\ln\dfrac{n-1}{n+1}$ $\qquad(n>1)$.

2610. $a_n=\ln^p\left(\sec\dfrac{\pi}{n}\right)$.

2611. $a_n=\log_{b^n}\left(1+\dfrac{\sqrt[n]{a}}{n}\right)$ $\qquad(a>0,\ b>0)$.

2612. $a_n=\left[e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p$.

2613. $a_n=\dfrac{1}{n^{1+\frac{k}{\ln n}}}$. **2614.** $a_n=\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

2615. Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n>0)$ este convergentă dacă există $\alpha>0$, astfel încît $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geq 1+\alpha$ pentru $n\geq n_0$ şi este divergentă dacă $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leq 1$ pentru $n\geq n_0$ (*criteriul logaritmic*).

Să se studieze convergenţa seriilor cu termenul general:

2616. $a_n=n^{\ln x}$ $\qquad(x>0)$.

2617. $a_n=\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ $\qquad(n>1)$.

2618. $a_n=\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ $\qquad(n>1)$.

Să se studieze, folosind criteriul integral al lui Cauchy, convergenţa seriilor cu termenul general:

2619. $a_n=\dfrac{1}{n\ln^p n}$ $\qquad(n>1)$.

2620. $a_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ $\qquad(n>1)$.

2621. Să se studieze convergenţa seriei

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}.$$

2622. Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ cu termenii pozitivi monoton descrescători este convergentă sau divergentă după cum seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ este convergentă sau divergentă.

2623. Fie $f(x)$ o funcţie pozitivă monoton necrescătoare.

Să se demonstreze că dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ este convergentă, atunci pentru restul ei

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}f(k)$$

este valabilă evaluarea

$$\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx<R_n<f(n+1)+\int_{n+1}^{+\infty}f(x)\,dx.$$

Folosind aceasta, să se găsească suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},$$

cu o aproximaţie de 0,01.

2624. Să se demonstreze următorul *criteriu al lui Ermakov:* fie $f(x)$ o funcţie pozitivă monoton descrescătoare şi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda.$$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ este convergentă dacă $\lambda<1$ şi este divergentă dacă $\lambda>1$.

2625. Să se demonstreze următorul *criteriu al lui Lobacevski:* seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ cu termeni pozitivi care tind monoton către zero, este convergentă sau divergentă o dată cu seria

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_m2^{-m},$$

unde p_m este numărul maxim de termeni a_n care satisfac inegalitatea

$$a_n \geq 2^{-m} \qquad (n=1, 2, \dots, p_m).$$

Să se studieze convergenţa următoarelor serii:

2626. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$.

2627. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+a}-\sqrt[4]{n^2+n+b})$.

2628. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

2629. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}}\right)$.

2630. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln (n!)}{n^{\alpha}}$.

2631. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

2632. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$.

2633. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$.

2634. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}$.

2635. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n}\right)}$.

2636. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3}$.

2637. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}\right)$.

2638. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$.

2639. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2640. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$.

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

2641. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^{n^{\alpha}} - 1)$.

2642. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^{\alpha}} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right]$.

2643. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} \qquad (a>0)$.

2644. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b} (n+b)^{n+a}}$

$(a>0,\ b>0)$.

2645. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \dots (2n)!}$.

Să se studieze convergenţa seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ avînd ca termen general următoarele expresii:

2646. $u_n = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}\, dx}{1+x^2}$.

2647. $u_n = \frac{1}{\int\limits_0^{n} \sqrt[4]{1+x^4}\, dx}$.

2648. $u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$.

2649. $u_n = \int\limits_{n}^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

2650. $u_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x}\, dx$.

2651. $u_n = \frac{1!+2!+\dots+n!}{(2n)!}$.

2652. $u_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln^2 k}{n^{\alpha}}$.

Inlocuind şirurile x_n $(n=1, 2, \dots)$ prin seriile corespunzătoare, să se studieze convergenţa lor, dacă:

2653. $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

2654. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}$.

2655. Cam cîţi termeni trebuie luaţi din seriile de mai jos pentru a găsi sumele lor cu 5 zecimale exacte:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$.

§ 2. Criterii de convergenţă pentru serii alternate

1°. **Convergenţa absolută a unei serii.** Vom spune că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

este *absolut convergentă* dacă seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

este convergentă. In cazul acesta seria (1) este și ea convergentă. Suma unei serii absolut convergente nu depinde de ordinea termenilor.

Pentru a recunoaște dacă o serie (1) este absolut convergentă, este suficient să aplicăm seriei (2) criteriile de convergență cunoscute pentru seriile de semn constant.

Dacă seria (1) este convergentă iar seria (2) este divergentă, seria (1) se numește *simplu (condiționat) convergentă* (nu *absolut convergentă*). Suma unei serii simplu convergente poate fi făcută, printr-o permutare de termeni, să fie egală cu orice număr (*teorema lui Riemann*).

2°. Criteriul lui Leibniz. Seria alternată

$$b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots+(-1)^{n-1}b_n+\ldots$$

($b_n \geq 0$) este convergentă (în general, nu absolut convergentă) dacă a) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n=1, 2, \ldots$) și *b*) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$. In cazul acesta, restul seriei

$$R_n=(-1)^n b_{n+1}+(-1)^{n+1}b_{n+2}+\ldots$$

poate fi evaluat astfel:

$$R_n=(-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

3°. Criteriul lui Abel. Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

este convergentă dacă: 1) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă; 2) numerele b_n ($n=1, 2, \ldots$) formează un șir monoton și mărginit.

4°. Criteriul lui Dirichlet. Seria (3) este convergentă dacă: 1) sumele parțiale $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ sînt mărginite; 2) b_n tinde monoton către zero pentru $n\to\infty$.

2656. Să se demonstreze că termenii unei serii care nu este absolut convergentă pot fi grupați, fără a le modifica ordinea, în așa fel încît seria obținută să fie absolut convergentă.

2657. Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă dacă sînt satisfăcute condițiile: a) termenul general a_n al acestei serii

tinde către zero pentru $n\to\infty$; b) seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, obținută grupînd termenii seriei date, fără a modifica ordinea lor, este convergentă; c) numărul termenilor a_i, care intră în termenul $A_n=\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($p_1<p_2<\ldots$), este mărginit.

2658. Să se demonstreze că suma unei serii convergente nu se schimbă dacă modificăm ordinea termenilor acestei serii astfel încît nici unul din ei să nu se îndepărteze de la poziția lui anterioară cu mai mult de m locuri, unde m este un număr dat dinainte.

Să se demonstreze convergența următoarelor serii și să se găsească sumele lor:

2659. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$

2660. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots$

2661. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$

Indicație. Se va folosi formula $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$, unde C este constanta lui Euler și $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

2662. Știind că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, să se găsească sumele seriilor obținute din seria dată după modificarea ordinei termenilor ei:

a) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$

și

b) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$

2663. Să se modifice ordinea termenilor seriei convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

în așa fel, încît ea să devină o serie divergentă.

Să se studieze convergenţa următoarelor serii alternate:

2664. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

2665. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

2666. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\dots$

2667. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{n\pi}{4}$.

2668. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

2669. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

2670. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

2671. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

2672. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

2673. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

2674. Să se demonstreze că seria alternată

$$b_1-b_2+b_3-b_4+\dots+(-1)^{n-1}b_n+\dots \qquad (b_n>0)$$

este convergentă dacă

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)>0.$$

Să se studieze convergenţa absolută şi convergenţa simplă (condiţionată) a următoarelor serii:

2675. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

2676. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

2677. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$.

2678. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$.

2679. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

2680. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

2681. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n}+(-1)^{n-1}]^p}$.

2682. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

2683. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

2684. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}$.

2685. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$.

2686. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

2687. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$.

2688. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

2689. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left[\frac{1\cdot3\cdot5\dots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\dots(2n)}\right]^p$.

2690. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$.

2691. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

Indicaţie. Se va demonstra că $\lim_{n\to\infty} \sin n^2 \neq 0$.

2692. Fie

$$R(x)=\frac{a_0x^p+a_1x^{p-1}+\dots+a_p}{b_0x^q+b_1x^{q-1}+\dots+b_q},$$

o funcţie raţională, unde $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$ şi $|b_0x^q+b_1x^{q-1}+\dots+b_q|>0$ pentru $x\geq n_0$.

Să se studieze convergenţa absolută şi convergenţa simplă (condiţionată) a seriei

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n).$$

Să se studieze convergenţa următoarelor serii:

2693. $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\dots$

2694. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{4^p}+\dots$

2695. $1+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{1^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{9^p}+\frac{1}{11^p}-\frac{1}{5^p}+\dots$

2696. $1-\frac{2}{2^q}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}-\frac{2}{5^q}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}-\frac{2}{8^q}+\frac{1}{9^p}+\ldots$

2697. Să se demonstreze că seriile

a) $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots;$

b) $\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\ldots$

nu sînt absolut convergente în intervalul $(0, \pi)$.

2698. Să se determine pentru mulţimea parametrilor (p, x) ai seriilor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\qquad (0<x<\pi)$$

a) domeniul în care aceste serii sînt absolut convergente; b) domeniul în care aceste serii nu sînt absolut convergente.

2699. Să se determine pentru seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(1+p)(2+p)\ldots(n+p)}{n!\,n^q}$$

a) domeniul în care aceasta este absolut convergentă; b) domeniul în care aceasta este simplu convergentă.

2700. Să se studieze convergenţa seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{m}{n},$$

unde

$$\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}.$$

2701. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă şi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1,$$

se poate afirma oare că şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ este convergentă?

Să se studieze exemplele

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\quad \text{şi}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right].$$

2702. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ o serie care nu este absolut convergentă şi

$$P_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|+a_i}{2},\quad N_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{|a_i|-a_i}{2}.$$

Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n}{P_n}=1.$$

2703. Să se demonstreze că suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

este cuprinsă între $\frac{1}{2}$ şi 1 oricare ar fi $p>0$.

2704. Să se demonstreze că dacă în seria

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

modificăm ordinea termenilor astfel încît unui grup de p termeni pozitivi, luaţi în ordinea lor, să-i urmeze un grup de q termeni negativi, luaţi şi ei în ordinea lor, suma seriei astfel obţinute este egală cu

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

2705. Să se demonstreze că seria armonică $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ rămîne divergentă dacă, fără a modifica ordinea termenilor ei, schimbăm semnele în aşa fel, încît după p termeni pozitivi să urmeze q termeni negativi $(p\neq q)$. Convergenţa va avea loc numai pentru $p=q$.

§ 3. Operaţii cu serii

Suma şi produsul a două serii. Prin definiţie punem:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n);\quad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}c_n,$$

unde

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 .$$

Egalitatea a) nu este formală dacă seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sînt convergente, iar egalitatea b) are sens dacă, în afară de aceasta, cel puțin una din aceste serii este absolut convergentă.

2706. Ce se poate spune despre suma a două serii, dintre care a) una este convergentă, iar a doua este divergentă; b) ambele serii sînt divergente?

2707. Să se găsească suma următoarelor două serii:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right].$$

Să se găsească sumele următoarelor serii

2708. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right]$. **2709.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

2710. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ $\quad (|xy| < 1)$.

2711. Să se arate că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$

2712. Să se arate că

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n \qquad (|q| < 1).$$

2713. Să se arate că pătratul seriei convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

este o serie divergentă.

pagină lipsă

Ediție îngrijită: Comisia de revizie.

2742. Ce înseamnă faptul că șirul $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$: a) este convergent în intervalul $(x_0, +\infty)$; b) este uniform convergent în interval finit $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$; c) este uniform convergent în intervalul $(x_0, +\infty)$?

2743. Să se determine pentru șirul

$$f_n(x)=x^n \quad (x=1, 2, \ldots) \quad (0<x<1)$$

cel mai mic număr $N=N(\varepsilon, x)$, astfel încît, începînd cu rangul N, abaterea termenilor șirului, într-un punct dat, de la funcția limită să nu depășească 0,001, dacă $x=\frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[m]{10}}, \ldots$

Este acest șir uniform convergent în intervalul $(0, 1)$?

2744. Cîți termeni trebuie să luăm în seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

pentru ca suma parțială $S_n(x)$ să difere pentru $-\infty<x<+\infty$ de suma seriei cu mai puțin decît ε? Să se efectueze un calcul numeric pentru: a) $\varepsilon=0{,}1$; b) $\varepsilon=0{,}01$; c) $0{,}001$.

2745. Pentru ce valoare a lui n este asigurată inegalitatea

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \right| < 0{,}001 \quad (0 \leq x \leq 10)?$$

Să se studieze convergența uniformă a șirurilor de mai jos în intervalele indicate:

2746. $f_n(x)=x^n$; a) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; b) $0 \leq x \leq 1$.

2747. $f_n(x)=x^n-x^{n+1}$; $0 \leq x \leq 1$.

2748. $f_n(x)=x^n-x^{2n}$; $0 \leq x \leq 1$.

2749. $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$; $0<x<+\infty$.

2750. $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$; $0 \leq x \leq 1$.

2751. $f_n(x)=\frac{x^n}{1+x^n}$; a) $0 \leq x \leq 1-\varepsilon$; b) $1-\varepsilon \leq x \leq 1+\varepsilon$; c) $1+\varepsilon \leq x<+\infty$, unde $\varepsilon>0$.

2752. $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$; a) $0 \leq x \leq 1$; b) $1<x<+\infty$.

2753. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$; $-\infty<x<+\infty$.

2754. $f_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$; $0<x<+\infty$.

2755. a) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$; $-\infty<x<+\infty$; b) $f_n(x)=\sin\frac{x}{n}$; $-\infty<x<+\infty$.

2756. a) $f_n(x)=\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$; b) $f_n(x)=x\operatorname{arctg} nx$; $0<x<+\infty$.

2757. $f_n(x)=e^{n(x-1)}$; $0<x<1$.

2758. $f_n(x)=e^{-(x-n)^2}$; a) $-l<x<l$, unde l este un număr pozitiv oarecare; b) $-\infty<x<+\infty$.

2759. $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$; $0<x<1$.

2760. $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$; a) în intervalul finit (a, b); b) în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

2761. $f_n(x)=n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$; $1\leqq x\leqq a$.

2762. $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$; $0\leqq x\leqq 2$.

2763. $$f_n(x)=\begin{cases} n^2x, & \text{dacă } 0\leqq x\leqq \frac{1}{n}; \\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right), & \text{dacă } \frac{1}{n}<x<\frac{2}{n}; \\ 0, & \text{dacă } x\geqq\frac{2}{n}, \end{cases}$$

pe segmentul $0\leqq x\leqq 1$.

2764. Fie $f(x)$ o funcţie oarecare definită în intervalul (a, b), şi

$$f_n(x)=\frac{[nf(x)]}{n}\quad (n=1, 2,\ldots).$$

Să se demonstreze că

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\quad (a<x<b)$$

pentru $n\to\infty$.

2765. Să presupunem că funcţia $f(x)$ are o derivată continuă $f'(x)$ în intervalul (a, b) şi că

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

Să se demonstreze că $f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$ pe segmentul $\alpha\leqq x\leqq\beta$, unde $a<\alpha<\beta<b$.

2766. Fie $f_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{i}{n}\right)$, unde $f(x)$ este o funcţie continuă. Să se demonstreze că şirul $f_n(x)$ este uniform convergent pe orice segment finit $[a, b]$.

Să se studieze caracterul convergenţei următoarelor serii:

2767. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ a) în intervalul $|x|<q$, unde $q<1$; b) în intervalul $|x|<1$.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ pe segmentul $-1\leqq x\leqq 1$.

2769. $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ pe segmentul $0\leqq x\leqq 1$.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$; $-1\leqq x\leqq 1$.

2771. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$; $0<x<+\infty$.

2772. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$; $0<x<+\infty$.

2773. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{(1+x)(1+2x)\ldots(1+nx)}$

a) $0\leqq x\leqq\varepsilon$, unde $\varepsilon>0$; b) $\varepsilon\leqq x<+\infty$.

2774. Să se demonstreze, folosind criteriul lui Weierstrass, că seriile funcţionale de mai jos sînt uniform convergente în intervalele indicate:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$, $-\infty<x<+\infty$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$, $\quad -2<x<+\infty$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$, $\quad 0\leq x<+\infty$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, $\quad |x|<+\infty$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$, $\quad \frac{1}{2}\leq|x|\leq 2$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left[\frac{n}{2}\right]!}$, $\quad |x|<a$, a fiind un număr arbitrar pozitiv;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$, $\quad |x|<+\infty$;

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, $\quad |x|<+\infty$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$, $\quad |x|<+\infty$;

j) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)$ $\quad |x|<a$;

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$, $\quad 0\leq x<+\infty$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^3}$, $\quad |x|<+\infty$.

Să se studieze în intervalele indicate convergența uniformă a următoarelor serii de funcții:

2775. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ a) pe segmentul $\varepsilon\leq x\leq 2\pi-\varepsilon$, unde $\varepsilon>0$; b) pe segmentul $0\leq x\leq 2\pi$.

2776. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}$; $\quad 0<x<+\infty$.

2777. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$; $\quad 0<x<+\infty$.

Indicație. Se va evalua restul seriei.

2778. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\sin x}$; $\quad 0\leq x\leq 2\pi$.

2779. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$; $\quad |x|\leq 10$.

2780. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}$; $\quad -\infty<x<+\infty$.

2781. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$; $\quad 0\leq x<+\infty$.

2782. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$; $\quad 0\leq x<+\infty$.

2783. Este posibil ca un șir de funcții discontinue să tindă uniform către o funcție continuă?

Să se studieze exemplul

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\psi(x)\quad (n=1, 2, \ldots),$$

unde

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x \text{ este irațional};\\ 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional}.\end{cases}$$

2784. Să se demonstreze că dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ este uniform convergentă pe $[a, b]$, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ este și ea uniform convergentă pe $[a, b]$.

2785. Dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ este absolut și uniform convergentă pe $[a, b]$, rezultă oare că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ este uniform convergentă pe $[a, b]$?

Să se studieze exemplul $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$, unde $0\leq x\leq 1$.

2786. Să se demonstreze că nu se poate majora seria absolut şi uniform convergentă

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

unde

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 \leq x \leq 2^{-(n+1)}; \\ \frac{1}{n}\sin^2(2^{n+1}\pi x), & \text{dacă } 2^{-(n+1)} < x < 2^{-n}; \\ 0, & \text{dacă } 2^{-n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

printr-o serie numerică cu termeni nenegativi.

2787. Să se demonstreze că dacă seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x),$$

ai cărei termeni sînt funcţii monotone, este absolut convergentă în extremităţile segmentului $[a, b]$, această serie este absolut şi uniform convergentă pe segmentul $[a, b]$.

2788. Să se demonstreze că seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

este uniform convergentă pe orice segment situat în întregime în interiorul intervalului ei de convergenţă.

2789. Să presupunem că $a_n \to \infty$ în aşa fel, încît seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ este convergentă. Să se demonstreze că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

este absolut şi uniform convergentă pe orice mulţime mărginită şi închisă care nu conţine punctele a_n $(n=1, 2, \ldots)$.

2790. Să se demonstreze că dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, *seria lui Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

este uniform convergentă pentru $x \geq 0$.

2791. Să presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă. Să se demonstreze că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

este uniform convergentă în domeniul $x \geq 0$.

2792. Să se arate că funcţia

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

este continuă şi are o derivată continuă în domeniul $-\infty < x < +\infty$.

2793. Să se arate că funcţia

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

a) este definită şi continuă în toate punctele în afara celor corespunzătoare numerelor întregi: $x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; b) este periodică, avînd perioada egală cu unitatea.

2794. Să se arate că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

nu este uniform convergentă pe segmentul $0 \leq x \leq 1$, totuşi suma ei este o funcţie continuă pe acest segment.

2795. Să se determine domeniile de existenţă ale funcţiilor $f(x)$ şi să se studieze continuitatea lor, dacă:

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$;

b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$;

c) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

2796. Fie r_k $(k=1, 2, \ldots)$ numerele raţionale aparţinînd segmentului $[0, 1]$. Să se arate că funcţia

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

se bucură de următoarele proprietăţi: 1) este continuă; 2) este derivabilă în punctele iraţionale şi nu este derivabilă în punctele raţionale.

2797. Să se demonstreze că funcţia ζ *a lui Riemann*

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

este continuă în domeniul $x>1$ şi are în acest domeniu derivate continue de orice ordin.

2798. Să se demonstreze că *funcţia* θ

$$\theta(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$$

este definită şi infinit derivabilă pentru $x>0$.

2799. Să se determine domeniul de existenţă al funcţiei $f(x)$ şi să se studieze derivabilitatea ei, dacă:

$$\text{a) } f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{n+x};\qquad \text{b) } f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+x^2}.$$

2800. Să se arate că şirul

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n\quad (n=1,2,\ldots)$$

este uniform convergent în intervalul $(-\infty, +\infty)$, dar

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty} f'_n(1).$$

2801. Să se arate că şirul

$$f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

este uniform convergent în intervalul $(-\infty, +\infty)$, dar

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'\neq\lim_{n\to\infty} f'_n(x).$$

2802. Pentru ce valori ale parametrului α: a) este şirul

$$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}\qquad (1)$$

pagină lipsă

pagină lipsă

pagină lipsă

2827. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n.$

2828. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n.$ **2829.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(1+2\cos\frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}x^n.$

2830. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}.$

2831. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}x^n$ *(seria lui Pringsheim).*

2832. Să se determine domeniul de convergență al *seriei hipergeometrice*

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n+\ldots$$

Să se determine domeniul de convergență al seriilor de puteri generalizate:

2833. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n.$ **2835.** $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}.$

2834. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}.$ **2836.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}.$

2837. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}\operatorname{tg}^n x.$

2838. Să se dezvolte funcția

$$f(x)=x^3$$

după puterile întregi pozitive ale binomului $x+1$.

2839. Să se dezvolte funcția

$$f(x)=\frac{1}{a-x}\qquad(a\neq0)$$

într-o serie de puteri: a) după puterile lui x; b) după puterile binomului $x-b$, unde $b\neq a$; c) după puterile lui $\frac{1}{x}$. Să se indice domeniile de convergență corespunzătoare.

2840. Să se dezvolte funcţia $f(x)=\ln x$ după puterile întregi şi pozitive ale diferenţei $x-1$ şi să se determine intervalul de convergenţă al dezvoltării.

Să se calculeze suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Să se scrie dezvoltările următoarelor funcţii după puterile întregi pozitive ale variabilei x şi să se găsească intervalele de convergenţă corespunzătoare:

2841. $f(x)=\operatorname{sh} x$.

2842. $f(x)=\operatorname{ch} x$.

2843. $f(x)=\sin^2 x$.

2844. $f(x)=a^x \quad (a>0)$.

2845. $f(x)=\sin(\mu \arcsin x)$.

2846. $f(x)=\cos(\mu \arcsin x)$.

2847. Să se scrie primii trei termeni ai dezvoltării funcţiei $f(x)=x^x$ după puterile întregi pozitive ale diferenţei $x-1$.

2848. Să se scrie primii trei termeni ai dezvoltării funcţiei $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x\neq 0)$ şi $f(0)=e$, după puterile întregi pozitive ale variabilei x.

2849. Să se dezvolte funcţiile $\sin(x+h)$ şi $\cos(x+h)$ după puterile întregi pozitive ale variabilei h.

2850. Să se determine intervalul de convergenţă al dezvoltării într-o serie de puteri a funcţiei

$$f(x)=\frac{x}{x^2-5x+6}$$

a) după puterile lui x; b) după puterile binomului $x-5$, fără a efectua dezvoltarea însăşi.

Folosind dezvoltările fundamentale I—V, să se scrie dezvoltările în serie de puteri cu privire la x ale următoarelor funcţii:

2851. e^{-x^2}.

2852. $\cos^2 x$.

2853. $\sin^3 x$.

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

2855. $\frac{1}{(1-x)^2}$.

2856. $\frac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

2857. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

2858. $\frac{x}{1+x-2x^2}$.

Indicaţie. Se va dezvolta fracţia dată în fracţii simple.

2859. $\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$.

2860. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$.

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$.

2863. $\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

2864. $\frac{\sin a}{1-2x\cos a+x^2}$.

2865. $\frac{\operatorname{sh} a}{1-2x\operatorname{ch} a+x^2}$.

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

2868. $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$.

Indicaţie. Se vor folosi formulele lui Euler.

Dezvoltînd mai întîi derivatele, să se obţină printr-o integraer termen cu termen, dezvoltarea în serie de puteri a următoarelor funcţii:

2869. $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Să se calculeze suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

2870. $f(x)=\arcsin x$.

2871. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2872. $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

2873. Folosind diverse metode, să se găsească dezvoltările în serie de puteri ale următoarelor funcţii:

a) $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$;

b) $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$;

c) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;

d) $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{2x}{2-x^2}$;

e) $f(x)=x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$;

f) $f(x)=\arccos(1-2x^2)$;

g) $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;

h) $f(x)=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

2874. Folosind unicitatea dezvoltării

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\ldots,$$

să se calculeze derivatele de ordinul n ale următoarelor funcţii:

a) $f(x)=e^{x^2}$; b) $f(x)=e^{\frac{a}{x}}$; c) $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

2875. Să se dezvolte, după puterile întregi pozitive ale binomului $x+1$, funcţia

$$f(x)=\ln\frac{1}{2+2x+x^2}.$$

2876. Să se dezvolte funcţia

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

într-o serie de puteri după puterile negative ale variabilei x.

2877. Să se dezvolte funcţia

$$f(x)=\ln x,$$

într-o serie de puteri după puterile întregi pozitive ale fracţiei $\frac{x-1}{x+1}$.

2878. Să se dezvolte funcţia

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

într-o serie de puteri după puterile întregi pozitive ale fracţiei $\frac{x}{1+x}$.

2879. Fie

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Să se demonstreze direct că

$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

2880. Să presupunem că prin definiţie avem

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

şi

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Să se demonstreze că

a) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$; b) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

2881. Să se scrie cîţiva termeni ai dezvoltării în serie de puteri a funcţiei

$$f(x)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n+1}\right)\right]^{-1}.$$

Efectuînd operaţiile respective cu seriile de puteri, să se obţină dezvoltările în serii de puteri ale următoarelor funcţii:

2882. $f(x)=(1+x)e^{-x}$.

2883. $f(x)=(1-x)^2\operatorname{ch}\sqrt{x}$.

2884. $f(x)=\ln^2(1-x)$.

2885. $f(x)=(1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

2886. $f(x)=e^x\cos x$.

2887. $f(x)=e^x\sin x$.

2888. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

2889. $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$.

2890. $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

Să se scrie primii trei termeni (diferiţi de zero) ai dezvoltării într-o serie de puteri după puterile pozitive ale variabilei x, pentru următoarele funcţii:

2891. $f(x)=\operatorname{tg} x$.

2892. $f(x)=\operatorname{th} x$.

2893. $f(x)=\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}$.

2894. Să presupunem că dezvoltarea lui $\sec x$ este dată sub forma

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}.$$

Să se deducă relaţia de recurenţă pentru coeficienţii E_n *(numerele lui Euler)*.

2895. Să se dezvolte într-o serie de puteri funcţia

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}\quad(|x|<1).$$

2896. Fie $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Să se scrie dezvoltarea funcţiei $F(x)=\frac{f(x)}{1-x}$.

2897. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergenţă R_1, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ are raza de convergenţă R_2, se cere să se găsească razele de convergenţă R ale seriilor

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

2898. Fie

$$l=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{şi} \quad L=\overline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Să se demonstreze că raza de convergenţă R a seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ verifică inegalitatea

$$l \leqq R \leqq L.$$

2899. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x)$ este infinit derivabilă într-un anumit punct x_0 şi

$$|f^{(n)}(x_0)|<M \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

M fiind o constantă, atunci: 1) $f(x)$ este infinit derivabilă în orice punct a; 2) este valabilă dezvoltarea

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (|x|<+\infty).$$

2900. Să se demonstreze că dacă 1) $a_n \geqq 0$ şi 2) există

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=S, \quad \text{atunci} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n=S.$$

Să se dezvolte în serie de puteri următoarele funcţii:

2901. $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

2902. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$.

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$.

2905. $\int_0^x \frac{t\,dt}{\ln(1+t)}$ (se vor scrie primii patru termeni ai dezvoltării).

Folosind derivarea termen cu termen, să se calculeze sumele următoarelor serii:

2906. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots$

2907. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

2908. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$

2909. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\ldots$

2910. $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\ldots$

Indicaţie. Se va înmulţi derivata seriei cu $1-x$.

Folosind integrarea termen cu termen, să se calculeze suma seriilor:

2911. $x+2x^2+3x^3+\ldots$

2912. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$

2913. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$

2914. Să se arate că seria

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

verifică ecuaţia

$$y^{IV}=y.$$

2915. Să se arate că seria

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

verifică ecuaţia

$$xy''+y'-y=0.$$

Să se determine raza de convergenţă şi cercul de convergenţă ale următoarelor serii de puteri din planul complex ($z=x+iy$):

2916. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{n\cdot 2^n}$.

2917. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n z^n}{(n+1)(n+2)}$.

2918. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, z^n}{(1+i)(1+2i)\dots(1+ni)}$.

2919. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$. **2920.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-e^{i\alpha})^n}{n(1-e^{i\alpha})^n}$.

2921. Folosind formula binomului lui Newton, să se calculeze valoarea aproximativă a lui $\sqrt[3]{9}$ şi să se evalueze eroarea în cazul cînd luăm primii trei termeni ai dezvoltării.

2922. Să se calculeze valoarea aproximativă a lui:

a) $\operatorname{arctg} 1,2$; b) $\sqrt[10]{1000}$; c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; d) $\ln 1,25$ şi să se evalueze erorile respective.

Folosind dezvoltările respective, să se calculeze următoarele valori ale funcţiilor cu aproximaţia indicată.

2923. $\sin 18°$ cu 5 zecimale exacte.
2924. $\cos 1°$ cu 6 zecimale exacte.
2925. $\operatorname{tg} 9°$ cu 3 zecimale exacte.
2926. e cu 6 zecimale exacte.
2927. $\ln 1,2$ cu 4 zecimale exacte.
2928. Plecînd de la egalitatea

$$\frac{\pi}{6}=\arcsin\frac{1}{2},$$

să se calculeze numărul π cu 4 zecimale exacte.

2929. Folosind identitatea

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

să se calculeze numărul π cu 3 zecimale exacte.

2930. Folosind identitatea

$$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\frac{1}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

să se determine numărul π cu 9 zecimale exacte.

2931. Folosind formula

$$\ln(n+1)=\ln n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\dots\right],$$

să se calculeze $\ln 2$ şi $\ln 3$ cu 5 zecimale exacte.

2932. Folosind dezvoltările în serie ale funcţiilor de sub semnul integrală, să se calculeze cu 3 zecimale exacte următoarele integrale:

a) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$;

b) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}}dx$;

c) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$;

d) $\int_0^1 \cos x^2\, dx$;

e) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}dx$;

f) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$;

g) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$;

h) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

i) $\int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$;

j) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$;

k) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}dx$;

l) $\int_0^1 x^x dx$.

2933. Să se calculeze cu 2 zecimale exacte lungimea arcului unei bucle de sinusoidă

$$y=\sin x \qquad (0\leqq x\leqq \pi).$$

2934. Să se calculeze cu aproximaţie de 0,01 lungimea arcului elipsei avînd semiaxele $a=1$ şi $b=\frac{1}{2}$.

2935. Un conductor fixat pe doi stîlpi ce se găsesc la distanţa $2l=20$ m are forma unei parabole. Să se calculeze lungimea conductorului cu aproximaţia de 1 cm dacă săgeata datorită încovoierii este $h=40$ cm.

§ 6. Serii Fourier

1°. Teorema dezvoltării. Dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe porţiuni şi are o derivată $f'(x)$ continuă pe porţiuni în intervalul $(-l, l)$,

toate punctele ei de discontinuitate fiind regulate $\left(\text{adică } f(\xi)=\frac{1}{2}[f(\xi-0)+ + f(\xi+0)]\right)$, atunci funcția $f(x)$ poate fi reprezentată în acest interval printr-o serie Fourier

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

unde

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{2}$$

și

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{2'}$$

In particular:

a) dacă funcția $f(x)$ este pară, avem:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{3}$$

unde

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots);$$

b) dacă funcția $f(x)$ este impară, avem:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{4}$$

unde

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \qquad (n=1,\ 2,\ldots).$$

Funcția $f(x)$, definită în intervalul $(0,\ l)$ și bucurîndu-se în acest interval de proprietățile de continuitate date mai sus, poate fi reprezentată în acest interval atît prin formula (3), cît și prin formula (4).

2°. Condiția de completitudine. Pentru orice funcție $f(x)$ integrabilă în intervalul $(-l,\ l)$ împreună cu pătratul ei, seria (1), construită formal cu coeficienții (2), (2′), satisface *egalitatea lui Liapunov*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx.$$

3°. Integrarea seriilor Fourier. Seria Fourier (1) a funcției $f(x)$, chiar dacă este divergentă, este integrabilă în sens Riemann în intervalul $(-l,\ l)$ și poate fi integrată termen cu termen în acest interval.

2936. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(x)=\sin^4 x.$$

2937. Care este seria Fourier a polinomului trigonometric

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix)\,?$$

2938. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(x)=\operatorname{sgn}x \qquad (-\pi<x<\pi).$$

Să se deseneze graficul funcției și graficele cîtorva sume parțiale ale seriei Fourier pentru această funcție.

Folosind dezvoltarea în serie Fourier, să se calculeze suma *seriei lui Leibnitz*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcții, în intervalele indicate:

2939. $f(x)=\begin{cases}A, & \text{dacă } 0<x<l;\\ 0, & \text{dacă } l<x<2l,\end{cases}$

unde A este constant în intervalul $(0,\ 2l)$.

2940. $f(x)=x$ în intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

2941. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ în intervalul $(0,\ 2\pi)$.

2942. $f(x)=|x|$ în intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

2943. $f(x)=\begin{cases}ax, & \text{dacă } -\pi<x<0;\\ bx, & \text{dacă } 0<x<\pi,\end{cases}$

unde a și b sînt constante în intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

2944. $f(x)=\pi^2-x^2$ în intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

2945. $f(x)=\cos ax$ în intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

2946. $f(x)=\sin ax$ în intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

2947. $f(x)=\operatorname{sh} ax$ în intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

2948. $f(x)=e^{ax}$ în intervalul $(-h,\ h)$.

2949. $f(x)=x$ în intervalul $(a,\ a+2l)$.

2950. $f(x)=x\sin x$ în intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

2951. $f(x)=x\cos x$ în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcţii periodice:

2952. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

2953. $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

2954. $f(x)=\arcsin(\cos x)$.

2955. $f(x)=x-[x]$.

2956. $f(x)=(x)$ este distanţa între x şi numărul întreg cel mai apropiat.

2957. $f(x)=|\sin x|$.

2958. $f(x)=|\cos x|$.

2959. $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^n\frac{\sin nx}{\sin x}$ $\quad(|\alpha|<1)$.

2960. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x)=\sec x \qquad \left(-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\right).$$

Indicaţie. Se va afla relaţia dintre coeficienţii a_n şi a_{n-2}.

2961. Să se dezvolte funcţia $f(x)=x^2$: a) în serie de cosinus; b) în serie de sinus; c) în intervalul $(0,\ 2\pi)$.

Să se deseneze graficul funcţiilor şi graficele sumelor seriilor Fourier pentru cazurile a), b) şi c).

Folosind aceste dezvoltări, să se calculeze suma seriilor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\quad \text{şi}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$$

2962. Plecînd de la dezvoltarea

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi<x<\pi),$$

să se obţină prin integrare termen cu termen dezvoltarea în serie Fourier a funcţiilor x^2, x^3 şi x^4 în intervalul $(-\pi,\ \pi)$.

2963. Să se scrie egalitatea lui Liapunov pentru funcţia

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{pentru } |x|<\alpha;\\ 0 & \text{pentru } \alpha<|x|<\pi.\end{cases}$$

Plecînd de la egalitatea lui Liapunov, să se calculeze sumele seriilor

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}\quad \text{şi}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

2964. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{dacă } 0\leqq x\leqq 1;\\ 1, & \text{dacă } 1<x<2;\\ 3-x, & \text{dacă } 2\leqq x\leqq 3.\end{cases}$$

Folosind formulele

$$\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t}),\quad \sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t}),$$

unde $t=e^{ix}$ şi $\bar{t}=e^{-ix}$, să se obţină dezvoltarea în serie Fourier a următoarelor funcţii:

2965. $\cos^{2m}x$ (m fiind un număr întreg pozitiv).

2966. $\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $\quad(|q|<1)$.

2967. $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ $\quad(|q|<1)$.

2968. $\dfrac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ $\quad(|q|<1)$.

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ $\quad(|q|<1)$.

Să se dezvolte în serie Fourier următoarele funcţii periodice nemărginite:

2970. $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

2971. $f(x)=\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

2972. $f(x)=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

2973. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia

$$f(x)=\int_0^x \ln\sqrt{\left|\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right|}\,dt \qquad (-\pi\leqq x\leqq\pi).$$

2974. Să se dezvolte în serie Fourier funcţiile

$$x=x(s),\quad y=y(s)\qquad (0\leqq s\leqq 4a),$$

care dau reprezentarea parametrică a conturului pătratului: $0<x<a$, $0<y<a$, unde s este lungimea arcului, luat în sens invers mişcării acelor unui ceasornic considerat de la punctul $O(0, 0)$.

2975. Cum trebuie prelungită în intervalul $(-\pi, \pi)$, funcţia integrabilă $f(x)$, definită în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru ca dezvoltarea sa în serie Fourier să aibă forma

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \qquad (-\pi<x<\pi)\ ?$$

2976. Cum trebuie prelungită, în intervalul $(-\pi, \pi)$, funcţia integrabilă $f(x)$, definită în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru ca dezvoltarea sa în serie Fourier să aibă forma

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \qquad (-\pi<x<\pi)\ ?$$

2977. Să se dezvolte funcţia

$$f(x)=x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: a) în serie de cosinuşi de argument par; b) în serie de sinuşi de argument impar.

Să se deseneze graficele sumelor seriilor Fourier pentru cazurile a) şi b).

2978. Să presupunem că funcţia $f(x)$ este *antiperiodică* cu perioada π, adică

$$f(x+\pi)=-f(x).$$

Ce particularităţi are seria Fourier a acestei funcţii în intervalul $(-\pi, \pi)$?

2979. Ce particularităţi are seria Fourier a funcţiei $f(x)$ în intervalul $(-\pi, \pi)$, dacă $f(x+\pi)=f(x)$?

2980. Care sînt particularităţile coeficienţilor Fourier a_n, $b_n (n=1, 2,\ldots)$ ai funcţiei $y=f(x)$ de perioadă 2π, dacă graficul funcţiei: a) are centrele de simetrie în punctele $(0, 0)$, $\left(\pm\frac{\pi}{2}, 0\right)$; b) are centrul de simetrie în originea coordonatelor şi axa de simetrie $x=\pm\frac{\pi}{2}$?

2981. Ce relaţii există între coeficienţii Fourier a_n, b_n şi α_n, $\beta_n (n=0, 1, 2,\ldots)$ ai funcţiilor $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$, dacă

$$\varphi(-x)=\psi(x)\ ?$$

2982. Ce relaţii există între coeficienţii Fourier a_n, b_n şi α_n, $\beta_n (n=0, 1, 2,\ldots)$ ai funcţiilor $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$, dacă

$$\varphi(-x)=-\psi(x)\ ?$$

2983. Cunoscînd coeficienţii Fourier a_n, $b_n (n=0, 1, 2,\ldots)$ ai funcţiei integrabile $f(x)$ de perioadă 2π, să se calculeze coeficienţii Fourier $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n (n=0, 1, 2,\ldots)$ ai funcţiei „deplasate“ $f(x+h)$ $(h=\text{const})$.

2984. Cunoscînd coeficienţii Fourier a_n, $b_n (n=0, 1, 2,\ldots)$ ai funcţiei integrabile $f(x)$ de perioadă 2π, să se calculeze coeficienţii Fourier A_n, $B_n (n=0, 1, 2,\ldots)$ ai *funcţiei lui Steklov*

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\, d\xi.$$

2985. Fie $f(x)$ o funcţie continuă de perioadă 2π şi a_n $b_n (n=0, 1, 2,\ldots)$ coeficienţii dezvoltării sale în serie Fourier. Să se calculeze coeficienţii Fourier A_n, $B_n (n=0, 1, 2,\ldots)$ ai funcţiei

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t)\, dt.$$

Folosind rezultatul obţinut să se demonstreze egalitatea lui Liapunov.

§ 7. Însumarea seriilor

1°. Însumarea directă. Dacă

$$u_n=v_{n+1}-v_n \qquad (n=1, 2,\ldots) \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} v_n=v_\infty,$$

atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=v_\infty-v_1.$$

In particular, dacă

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m}},$$

unde numerele a_i $(i=1, 2, \dots)$ formează o progresie aritmetică cu rația d, atunci

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m-1}}.$$

In unele cazuri seria căutată poate fi reprezentată sub forma unei combinații liniare de serii cunoscute:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{etc.}$$

2°. Metoda lui Abel. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă, atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Suma seriei de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se poate calcula, în exemplele cele mai simple care intervin, cu ajutorul derivării sau integrării termen cu termen.

3°. Insumarea seriilor trigonometrice. Pentru aflarea sumelor seriilor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

le considerăm de obicei ca fiind partea reală, respectiv coeficientul părții imaginare a sumei seriei de puteri din planul complex $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, unde $z = e^{ix}$.

În multe cazuri este utilă seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z}.$$

Să se calculeze sumele următoarelor serii:

2986. $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots$

2987. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots$

2988. $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \dots$

2989. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

2990. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ (m fiind un număr natural).

2991. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \dots$

2992. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

2993. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$.

2994. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

2995. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

2996. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

2997. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

2998. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

2999. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

3000. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

3001. Fie $P(x) = a_0 + a_1(x) + \dots + a_m x^m$. Să se calculeze suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n.$$

Să se calculeze sumele următoarelor serii:

3002. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$.

3003. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$.

3004. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{(2n)!} x^{2n}$.

3005. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$.

Să se calculeze, derivînd termen cu termen, sumele seriilor:

3006. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

3007. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$.

3008. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

3009. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\ldots[a+(n-1)d]}{d\cdot 2d\ldots nd} x^n \qquad (d>0)$.

Indicație. Se va înmulți derivata seriei cu $1-x$.

3010. $\frac{1}{3}\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots$

Să se calculeze, integrînd termen cu termen, sumele seriilor:

3011. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}$.

3012. $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$.

3013. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

Să se calculeze, folosind metoda lui Abel, sumele următoarelor serii:

3014. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots$

3015. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$

3016. $1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$

3017. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\ldots$

Să se calculeze sumele următoarelor serii trigonometrice:

3018. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

3019. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$.

3020. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}$.

3021. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \qquad \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

3022. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

3023. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}$.

3024. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

3025. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$.

3026. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$.

3027. Să se construiască graficul curbei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx\cdot\sin ny}{n^2}=0.$$

Să se calculeze sumele următoarelor serii:

3028. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$.

3029. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

3030. $\frac{1!}{x+1}+\frac{2!}{(x+1)(x+2)}+\frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\ldots$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1}{a_2+x}\cdot\frac{a_2}{a_3+x}+\ldots$ în ipoteza că $x>0$, $a_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$ și că seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ este divergentă.

3032. $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}-\frac{x^4}{1-x^8}+\ldots$, dacă a) $|x|<1$; b) $|x|>1$.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, dacă a) $|x|<1$; b) $|x|>1$.

§ 8. Calcularea integralelor definite cu ajutorul seriilor

Să se calculeze următoarele integrale, dezvoltînd în serie funcția de sub semnul integrală:

3034. $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\,dx$.

3035. $\int_0^1 \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\,dx$.

3036. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

3037. $\int_0^1 x^{p-1}\ln(1-x^q)\,dx \qquad (p>0,\ q>0)$.

3038. $\int_0^1 \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx$.

3039. $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^{2\pi x}-1}$.

3040. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{e^x+1}$.

3041. Să se dezvolte după puterile întregi şi pozitive ale modulului $k\ (0 \leq k < 1)$ *integrala eliptică completă de speța întîi*

$$F(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

3042. Să se dezvolte după puterile întregi şi pozitive ale modulului $k\ (0 \leq k < 1)$ *integrala eliptică completă de speța a doua*

$$E(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

3043. Să se exprime lungimea arcului elipsei

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

prin seria dezvoltată după puterile întregi şi pozitive ale excentricității.

Să se demonstreze egalitățile:

3044. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

3045. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin ax\,dx = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}a^{2n+1}$.

3046. $\int\limits_0^{2\pi} e^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\,dx = \frac{\pi}{n!} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$.

Să se calculeze:

3047. $\int\limits_0^{2\pi} e^{a\cos x}\cos(a\sin x - nx)\,dx$ (n fiind un număr natural).

3048. $\int\limits_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\,dx$.

Indicație. V. exercițiul 2864.

3049. $\int\limits_0^{\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$.

3050. Să se demonstreze formula

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x}dx = \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{\theta_n n!}{a^{n+1}}, \quad (1)$$

unde $a > 0$ şi $0 < \theta_n < 1$.

Cu ce aproximație se exprimă integrala

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x}dx,$$

dacă luăm în formula (1) primii doi termeni?

§ 9. Produse infinite

1°. Convergența produsului. Spunem că produsul infinit

$$p_1 p_2 \ldots p_n \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (1)$$

este convergent, dacă există limita finită şi diferită de zero

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} p_i = \lim_{n\to\infty} P_n = P.$$

Dacă $P=0$ şi nici unul din factorii p_n nu este egal cu zero, spunem că produsul (1) *diverge către zero*; în caz contrar vom spune că produsul converge către zero.

Convergența produsului (1) este echivalentă cu convergența seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n. \quad (2)$$

Condiția necesară pentru ca produsul infinit să fie convergent este ca

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1.$$

Dacă $p_n = 1+\alpha_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ şi α_n nu-şi schimbă semnul, atunci pentru ca produsul (1) să fie convergent este necesar şi suficient ca seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \quad (3)$$

să fie convergentă.

In cazul general, cînd α_n nu păstrează un semn constant și seria (3) este convergentă, produsul (1) converge sau diverge către zero după cum seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2$$

este convergentă sau divergentă.

2°. Convergența absolută. Vom spune că produsul (1) este *absolut convergent* sau *simplu convergent*, după cum seria (2) este absolut convergentă sau simplu convergentă. Condiția necesară și suficientă pentru ca produsul (1) să fie absolut convergent este ca seria (3) să fie absolut convergentă.

3°. Dezvoltarea funcțiilor în produse infinite. Pentru $-\infty < x < +\infty$ au loc dezvoltările

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right].$$

In particular, obținem din prima dezvoltare pentru $x = \frac{\pi}{2}$ *formula lui Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

Să se demonstreze următoarele egalități:

3051. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

3052. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}$.

3053. $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{n(n+1)}\right] = \frac{1}{3}$.

3054. $\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right] = 2$.

3055. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}$.

3056. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$.

3057. $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}$.

3058. $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}$. $\quad (|x| < 1)$.

3059. $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$

3060. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Să se demonstreze convergența și să se determine valorile următoarelor produse infinite:

3061. $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$.

3062. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]$.

3063. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$.

3064. $\prod_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ $\quad (a > 0)$.

3065. Implică oare convergența produselor infinite $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ și $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ și convergența produselor: a) $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$; b) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$; c) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$; d) $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$?

Să se studieze convergența următoarelor produse infinite:

3066. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

3067. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

3068. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$.

3069. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

3070. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

3071. $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2 + a_1 n + b_1}{n^2 + an + b}$, unde $n^2 + an + b > 0$ pentru $n \geq n_0$.

3072. $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\ldots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\ldots(n-b_p)}$, unde $n_0 > b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

3073. $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

3074. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

3075. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.

3076. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

3077. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$.

3078. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}}$, unde $c>0$.

3079. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1-x^n)$.

3080. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$.

3081. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}\right]$.

3082. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}}$.

3083. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{x^n}{n^p}\right) \cos\frac{x^n}{n^q}$.

3084. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$.

3085. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

3086. Să se demonstreze că produsul $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ este convergent dacă este convergentă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$.

3087. Să se demonstreze că produsul $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}\right)$ este convergent, dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ converge absolut.

Să se studieze convergența absolută și convergența simplă a următoarelor produse infinite:

3088. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$.

3089. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right]$.

3090. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

3091. $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left[1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right]$.

3092. $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

3093. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

3094. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

3095. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left[1+\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right]$.

3096. $\left(1+\frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\times$

$$\times\left(1-\frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

3097. $\left(1+\frac{1}{1^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{4^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{5^\alpha}\right)^2\left(1+\frac{1}{6^\alpha}\right)\cdots$

3098. Să se arate că produsul

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

este convergent, deși seria

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots$$

este divergentă.

3099. Să se arate că produsul $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$, unde

$$\alpha_n=\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{dacă } n=2k-1; \\ \frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{dacă } n=2k, \end{cases}$$

este convergent deși seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ sînt divergente.

3100. Fie

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

(funcția lui Riemann) și p_n $(n=1, 2, \ldots)$ niște numere prime succesive.

Să se demonstreze că

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x).$$

3101. Să se demonstreze că produsul

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

şi seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n},$$

unde p_n $(n=1, 2,\ldots)$ sînt numere prime succesive, sînt divergente (Euler).

3102. Fie $a_n>0$ $(n=1, 2,\ldots)$ şi

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{p}{n}+O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \quad (\varepsilon>0).$$

Să se demonstreze că

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Indicaţie. Se va considera

$$\lim_{n\to\infty} a_n n^p=a_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p.$$

3103. Să se demonstreze cu ajutorul formulei lui Wallis că

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. Să se demonstreze că expresia

$$a_n=\frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

are o limită A, diferită de zero pentru $n\to\infty$.

Să se deducă de aici formula lui Stirling

$$n!=An^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\,(1+\varepsilon_n),$$

unde $\lim \varepsilon_n=0$ şi $A=\sqrt{2\pi}$.

Indicaţie. Se va pune limita căutată sub forma unui produs infinit

$$A=\lim_{n\to\infty}a_n=a_1\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Pentru determinarea constantei A se va folosi formula lui Wallis.

3105. *Funcţia* $\Gamma(x)$ se defineşte, după Euler, prin următoarea formulă:

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Pornind de la această formulă: a) să se pună funcţia $\Gamma(x)$ sub forma unui produs infinit; b) să se arate că $\Gamma(x)$ este definită pentru toate valorile reale ale lui x diferite de numerele întregi negative; c) să se demonstreze relaţia

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x);$$

d) să se obţină valoarea lui $\Gamma(n)$ pentru n întreg şi pozitiv.

3106. Să presupunem că funcţia $f(x)$ este (propriu) integrabilă pe segmentul $[a, b]$ şi că

$$\delta_n=\frac{b-a}{n},\; f_{in}=f(a+i\delta_n) \quad (i=1, 2,\ldots, n).$$

Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_n f_{in})=e^{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

3107. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1}(a+ib)}}{\sum_{i=0}^{n-1}(a+ib)}=\frac{2}{e},$$

unde $a>0$ şi $b>0$.

3108. Fie $f_n(x)$ $(n=1, 2,\ldots)$ nişte funcţii continue în intervalul (a, b) şi $|f_n(x)|\leq c_n$ $(n=1, 2,\ldots)$, unde seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ este

Să se demonstreze că funcţia

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)]$$

este continuă în intervalul (a, b).

3109. Să se găsească expresia derivatei funcţiei

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}[1+f_n(x)].$$

Care sînt condiţiile suficiente pentru ca $F'(x)$ să existe?

3110. Să se demonstreze că dacă $0<x<y$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{y(y+1)\ldots(y+n)}=0.$$

§ 10. Formula lui Stirling

Pentru calcularea lui $n!$ pentru valori mari ale lui n este utilă *formula lui Stirling*

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\quad(0<\theta_n<1).$$

Să se calculeze, folosind formula lui Stirling, valorile aproximative ale:

3111. $\lg 100!$

3112. $1\cdot3\cdot5\ldots1999.$

3113. $\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots99}{2\cdot4\cdot6\ldots100}.$

3114. $C_{100}^{40}.$

3115. $\dfrac{100!}{20!\,30!\,50!}.$

3116. $\int_0^1(1-x^2)^{50}dx.$

3117. $\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\,dx.$

3118. Să se deducă o formulă asimptotică pentru produsul

$$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1).$$

3119. Să se calculeze valoarea aproximativă a lui C_{2n}^n, dacă n este mare.

3120. Să se calculeze, folosind formula lui Stirling, următoarele limite:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

§ 11. Aproximarea funcţiilor continue prin polinoame

1°. Formula de interpolare a lui Lagrange. *Polinomul lui Lagrange*

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})\,(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})\,(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\,y_i$$

se bucură de proprietatea că $P_n(x_i)=y_i$ $(i=0, 1,\ldots, n)$.

2°. Polinoamele lui Bernstein. Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe segmentul $[0, 1]$, atunci *polinoamele lui Bernstein*

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)C_n^i x^i(1-x)^{n-i}$$

pe segmentul $[0, 1]$ converg uniform către funcţia $f(x)$, pentru $n\to\infty$.

3121. Să se construiască polinomul $P_n(x)$ de grad minim, care să aibă sistemul dat de valori:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

Care sînt valorile aproximative ale lui

$$P_n(-1),\quad P_n(1),\quad P_n(6)?$$

3122. Să se scrie ecuaţia parabolei $y=ax^2+bx+c$, care trece prin următoarele trei puncte:

$$A(x_0-h,\ y_{-1}),\quad B(x_0,\ y_0),\quad C(x_0+h,\ y_1).$$

3123. Să se deducă formula care ne dă valoarea aproximativă a rădăcinii $y=\sqrt{x}$ $(1\le x\le100)$, folosind valorile $x_0=1$, $y_0=1$; $x_1=25$, $y_1=5$; $x_2=100$, $y_2=10$.

3124. Să se deducă formula de aproximaţie avînd forma

$$\sin x^0 \approx ax + bx^3 \quad (0 \leqq x \leqq 90),$$

folosind valorile

$$\sin 0° = 0, \quad \sin 30° = \frac{1}{2}, \ \sin 90° = 1.$$

Folosind această formulă, să se calculeze valorile aproximative ale lui:

$$\sin 20°, \ \sin 40°, \ \sin 80°.$$

3125. Să se calculeze polinomul de interpolare al lui Lagrange pentru funcţia $f(x) = |x|$ pe segmentul $[-1, 1]$, dacă abscisele punctelor de interpolare ale acestui polinom sînt $x_i = 0, \ \pm \frac{1}{2}, \ \pm 1$.

3126. Inlocuind funcţia $f(x)$ prin polinomul lui Lagrange, să se calculeze valoarea aproximativă a integralei

$$\int_0^2 y(x)\, dx,$$

unde

x	0	0,5	1	1,5	2
$y(x)$	5	4,5	3	2,5	5

3127. Să se construiască polinoamele lui Bernstein $B_n(x)$ pentru funcţiile x, x^2, x^3 pe segmentul $[0, 1]$.

3128. Să se scrie formula polinoamelor lui Bernstein $B_n(x)$ pentru funcţia $f(x)$, definită pe segmentul $[a, b]$.

3129. Să se aproximeze funcţia $f(x) = \frac{|x|+x}{2}$ pe segmentul $[-1, 1]$ prin polinomul lui Bernstein $B_4(x)$.

Să se construiască graficele funcţiilor $y = \frac{|x|+x}{2}$ şi $y = B_4(x)$.

3130. Să se aproximeze funcţia $f(x) = |x|$ prin polinoamele lui Bernstein de grad par, pentru $-1 \leqq x \leqq 1$.

3131. Să se scrie polinomul lui Bernstein $B_n(x)$ pentru funcţia

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leqq x \leqq b).$$

3132. Să se calculeze polinomul $B_n(x)$ pentru funcţia $f(x) = \cos x$ pe segmentul $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$.

3133. Să se demonstreze că $|x| = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$ pe segmentul $[-1, 1]$, unde

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1\cdot 3\ldots(2i-3)}{2\cdot 4\ldots(2i)}(1-x^2)^i.$$

3134. Fie $f(x)$ o funcţie continuă pentru $-\pi \leqq x \leqq \pi$ şi a_n, b_n $(n=0, 1, 2,\ldots)$ coeficienţii ei Fourier. Să se demonstreze că polinoamele trigonometrice ale lui Fejér

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{n}\right)(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

converg uniform către funcţia $f(x)$ în intervalul $(-\pi, \pi)$.

3135. Să se construiască polinomul lui Fejér $\sigma_{2n-1}(x)$ pentru funcţia

$$f(x) = |x| \quad \text{pentru } -\pi \leqq x \leqq \pi.$$

PARTEA A DOUA

FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

CAPITOLUL VI

CALCULUL DIFERENŢIAL AL FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

§ 1. Limita unei funcţii. Continuitatea

1°. Limita unei funcţii. Fie funcţia $f(P)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită pe mulţimea E, avînd un punct de acumulare p_0. Se spune că

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$

dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta=\delta(\varepsilon, P_0)>0$, astfel încît

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

de îndată ce $P\in E$ şi $0<\rho(P, P_0)<\delta$, unde $\rho(P, P_0)$ este distanţa dintre punctele P şi P_0.

2°. Continuitatea. Spunem că funcţia $f(P)$ *este continuă în punctul* P_0, dacă

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

Funcţia $f(P)$ *este continuă într-un domeniu dat* dacă ea este continuă în fiecare punct al acestui domeniu.

3°. Continuitatea uniformă. Spunem că funcţia $f(P)$ *este uniform continuă* în domeniul G, dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta>0$, care depinde numai de ε, astfel încît pentru orice pereche de puncte P' şi P'' din G are loc inegalitatea

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon,$$

de îndată ce

$$\rho(P', P'')<\delta.$$

O funcţie continuă într-un domeniu mărginit şi închis este uniform continuă în acest domeniu.

Să se determine şi să se figureze domeniul de existenţă al următoarelor funcţii:

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

3143. $u=\ln(-x-y)$.

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

3145. $u=\arccos\dfrac{x}{x+y}$.

3146. $u=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

3148. $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3149. $u=\ln(xyz)$.

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

Să se construiască liniile de nivel ale următoarelor funcţii:

3151. $z=x+y$.

3152. $z=x^2+y^2$.

3153. $z=x^2-y^2$.

3154. $z=(x+y)^2$.

3155. $z=\dfrac{y}{x}$.

3156. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

3157. $z=\sqrt{xy}$.

3158. $z=|x|+y$.

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

3161. $z=x^y \quad (x>0)$.

3162. $z=x^y e^{-x} \quad (x>0)$.

3163. $z=\ln\sqrt{\dfrac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}} \quad (a>0)$

3164. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{2ay}{x^2+y^2-a^2} \quad (a>0)$.

3165. $z=\operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$.

Să se găsească suprafeţele de nivel ale următoarelor funcţii:

3166. $u=x+y+z$.

3167. $u=x^2+y^2+z^2$.

3168. $u=x^2+y^2-z^2$.

3169. $u=(x+y)^2+z^2$.

3170. $u=\operatorname{sgn}\sin(x^2+y^2+z^2)$.

Să se studieze natura suprafețelor după ecuațiile lor:

3171. $z=f(y-ax)$.

3172. $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3173. $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

3174. $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

3175. Să se construiască graficul funcției

$$F(t)=f(\cos t,\ \sin t),$$

unde

$$f(x,\ y)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } y\geq x, \\ 0, & \text{dacă } y<x. \end{cases}$$

3176. Să se găsească $f\left(1,\ \frac{y}{x}\right)$, dacă $f(x,\ y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

3177. Să se găsească $f(x)$, dacă

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\quad (x>0).$$

3178. Fie

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1).$$

Să se determine funcțiile f și z, dacă $z=x$ pentru $y=1$.

3179. Fie

$$z=x+y+f(x-y).$$

Să se găsească funcțiile f și z, dacă $z=x^2$ pentru $y=0$.

3180. Să se găsească $f(x,\ y)$, dacă $f\left(x+y,\ \frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$.

3181. Să se arate că pentru funcția

$$f(x,\ y)=\frac{x-y}{x+y}$$

avem

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x,\ y)\}=1\ ;\quad \lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x,\ y)\}=-1,$$

în timp ce $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)$ nu există.

3182. Să se arate că deși pentru funcția

$$f(x,\ y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

avem

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x,\ y)\}=\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x,\ y)\}=0,$$

totuși $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)$ nu există.

3183. Să se arate că deși pentru funcția

$$f(x,\ y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

limitele iterate $\lim\limits_{x\to 0}\{\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)\}$ și $\lim\limits_{y\to 0}\{\lim\limits_{x\to 0} f(x,\ y)\}$ nu există, totuși există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,\ y)=0$.

3184. Să se găsească

$$\lim_{x\to a}\{\lim_{y\to b} f(x,\ y)\}\quad \text{și}\quad \lim_{y\to b}\{\lim_{x\to a} f(x,\ y)\},$$

dacă:

a) $f(x,\ y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

b) $f(x,\ y)=\frac{x^y}{1+x^y}$, $a=\infty$, $b=+0$;

c) $f(x,\ y)=\sin\frac{\pi x}{2x+y}$, $a=\infty$, $b=\infty$;

d) $f(x,\ y)=\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}$, $a=0$, $b=\infty$;

e) $f(x,\ y)=\log_x(x+y)$, $a=1$, $b=0$.

Să se găsească următoarele limite duble:

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$.

3186. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

3187. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}$.

3188. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)\,e^{-(x+y)}$.

3189. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

3190. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

3191. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

3192. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3193. Pentru ce direcţie φ există limita finită:

$$\text{a)} \lim_{\rho\to+0} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}; \quad \text{b)} \lim_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\cdot\sin 2xy,$$

dacă $x=\rho\cos\varphi$ şi $y=\rho\sin\varphi$?

Să se găsească punctele de discontinuitate ale următoarelor funcţii:

3194. $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3195. $u=\frac{xy}{x+y}$.

3196. $u=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.

3197. $u=\sin\frac{1}{xy}$.

3198. $u=\frac{1}{\sin x\sin y}$.

3199. $u=\ln(1-x^2-y^2)$.

3200. $u=\frac{1}{xyz}$.

3201. $u=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$.

3202. Să se arate că funcţia

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{dacă } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare din variabilele x şi y în parte (fixînd cealaltă variabilă), dar nu este continuă în raport cu ansamblul acestor variabile.

3203. Să se arate că funcţia

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{dacă } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & \text{dacă } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

este continuă în punctul O (0, 0) de-a lungul oricărei raze

$$x=t\cos\alpha, \quad y=t\sin\alpha \qquad (0\leq t<+\infty),$$

care trece prin acest punct, adică există

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)=f(0, 0);$$

totuşi această funcţie nu este continuă în punctul (0, 0).

3204. Să se arate că mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei $f(x, y)=x\sin\frac{1}{y}$, dacă $y\neq 0$ şi $f(x, 0)=0$, nu este o mulţime închisă.

3205. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă în raport cu variabila x într-un domeniu G şi este uniform continuă în raport cu variabila y, această funcţie este continuă în domeniul considerat.

3206. Să se demonstreze că dacă într-un domeniu G funcţia $f(x, y)$ este continuă în raport cu variabila x şi satisface condiţia lui Lipschitz în raport cu variabila y, adică

$$|f(x, y')-f(x, y'')|\leq L|y'-y''|,$$

unde $(x, y')\in G$, $(x, y'')\in G$ şi L este o constantă, această funcţie este continuă în domeniul dat.

3207. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă în raport cu fiecare din variabilele x şi y în parte şi este monotonă în raport cu una din ele, această funcţie este continuă în raport cu ansamblul variabilelor (Young).

3208. Să presupunem că funcţia $f(x, y)$ este continuă în domeniul $a\leq x\leq A$, $b\leq y\leq B$, iar şirul de funcţii $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ este uniform convergent pe $[a, A]$ şi satisface condiţia $b\leq\varphi_n(x)\leq B$. Să se demonstreze că şirul de funcţii

$$F_n(x)=f(x, \varphi_n(x)) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

este şi el uniform convergent pe $]a, A]$.

3209. Să presupunem că: 1) funcţia $f(x, y)$ este continuă în domeniul $R(a<x<A;\ b<y<B)$; 2) funcţia $\varphi(x)$ este continuă în intervalul (a, A) şi ia valori aparţinînd intervalului (b, B). Să se demonstreze că funcţia

$$F(x)=f(x, \varphi(x))$$

este continuă în intervalul (a, A).

3210. Să presupunem că: 1) funcţia $f(x, y)$ este continuă în domeniul $R(a<x<A;\ b<y<B)$; 2) funcţiile $x=\varphi(u, v)$ şi $y=\psi(u, v)$ sînt continue în domeniul $R'(a'<u<A';\ b'<v<B')$ şi iau valori aparţinînd respectiv intervalelor (a, A) şi (b, B). Să se demonstreze că funcţia

$$F(u, v)=f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

este continuă în domeniul R'.

§ 2. Derivate parțiale. Diferențiala unei funcții

1°. **Derivate parțiale.** Rezultatul derivării unei funcții de mai multe variabile nu depinde de ordinea derivării, dacă toate derivatele care intră în calcul sînt continue.

2°. **Diferențiala unei funcții.** Dacă creșterea totală a unei funcții $f(x, y, z)$ de variabilele independente x, y, z poate fi reprezentată sub forma

$$\Delta f(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

unde A, B, C nu depind de $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ și $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, spunem că funcția $f(x, y, z)$ este *derivabilă*, iar partea principală (liniară) a creșterii $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$, egală cu

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\,dx + f'_y(x, y, z)\,dy + f'_z(x, y, z)\,dz, \qquad (1)$$

unde $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, o numim diferențiala acestei funcții.

Formula (1) își păstrează sensul și în cazul cînd variabilele x, y, z sînt niște funcții derivabile de alte variabile independente.

Dacă x, y, z sînt variabile independente, este valabilă, pentru *diferențialele de ordin superior*, formula simbolică

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x, y, z).$$

3°. **Derivata unei funcții compuse.** Dacă $w = f(x, y, z)$, unde $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$ și funcțiile φ, ψ, χ sînt derivabile atunci

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Pentru calcularea derivatelor de ordinul al doilea ale funcției w este util să folosim următoarele formule simbolice:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z}$$

și

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \left(P_1\frac{\partial}{\partial x} + Q_1\frac{\partial}{\partial y} + R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x} + Q_2\frac{\partial}{\partial y} + R_2\frac{\partial}{\partial z}\right) w +$$
$$+ \frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

unde

$$P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad R_1 = \frac{\partial z}{\partial u}$$

și

$$P_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \quad Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4°. **Derivata după o direcție dată.** Dacă direcția l din spațiul $Oxyz$ este dată de cosinușii directori: $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ și dacă funcția $u = f(x, y, z)$ este derivabilă, atunci *derivata după direcția l* se calculează după formula

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Viteza creșterii maxime a unei funcții într-un punct dat este determinată în mărime, direcție și sens de vectorul — *gradientul funcției:*

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

a cărui mărime este egală cu

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. Să se arate că

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)].$$

3212. Să se calculeze $f'_x(x, 1)$, dacă

$$f(x, y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întîi și al doilea ale următoarelor funcții:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.

3215. $u = \frac{x}{y^2}$.

3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3217. $u = x\sin(x+y)$.

3218. $u = \frac{\cos x^2}{y}$.

3219. $u = \operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$.

3220. $u = x^y$.

3221. $u = \ln(x+y^2)$.

3222. $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3223. $u = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

3224. $u = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

3225. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3226. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

3227. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

3228. $u = x^{y^z}$.

3229. Să se verifice egalitatea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},$$

dacă

a) $u=x^2-2xy-3y^2$; b) $u=x^{y^z}$; c) $u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

3230. Să presupunem că $f(x, y)=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, dacă $x^2+y^2\neq 0$ şi $f(0, 0)=0$.

Să se arate că

$$f''_{xy}(0, 0)\neq f''_{yx}(0, 0).$$

3231. Fie $u=f(x, y, z)$ o funcţie omogenă de gradul n. Să se verifice teorema lui Euler cu privire la funcţiile omogene pe următoarele exemple:

a) $u=(x-2y+3z)^2$; b) $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; c) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

3232. Să se demonstreze că dacă funcţia derivabilă $u=f(x, y, z)$ verifică ecuaţia

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

ea este o funcţie omogenă de gradul n.

Indicaţie. Se va considera funcţia auxiliară

$$F(t)=\frac{f(tx, ty, tz)}{t^n}.$$

3233. Să se demonstreze că dacă $f(x, y, z)$ este o funcţie derivabilă omogenă de gradul n, derivatele ei parţiale $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ sînt funcţii omogene de gradul $n-1$.

3234. Fie $u=f(x, y, z)$ o funcţie omogenă de gradul n de două ori derivabilă. Să se demonstreze că

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=n(n-1)\,u.$$

Să se calculeze diferenţialele de ordinul întîi şi al doilea ale următoarelor funcţii (x, y, z fiind variabile independente):

3235. $u=x^m y^n$.

3236. $u=\frac{x}{y}$.

3237. $u=\sqrt{x^2+y^2}$.

3238. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3239. $u=e^{xy}$.

3240. $u=xy+yz+zx$.

3241. $u=\frac{z}{x^2+y^2}$.

3242. Să se calculeze $df(1, 1, 1)$ şi $d^2f(1, 1, 1)$, dacă

$$f(x, y, z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}.$$

3243. Să se arate că dacă

$$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

atunci $d^2u\geq 0$.

3244. Presupunînd că x, y sînt mici în valoare absolută, să se deducă formulele aproximative pentru următoarele expresii:

a) $(1+x)^m(1+y)^n$;

b) $\ln(1+x)\cdot\ln(1+y)$;

c) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$.

3245. Inlocuind creşterea unei funcţii prin diferenţiala ei, să se calculeze cu aproximaţie:

a) $1{,}002\cdot 2{,}003^2\cdot 3{,}004^3$;

b) $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98}\,\sqrt[4]{1{,}05^3}}$;

c) $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$;

d) $\sin 29°\cdot\operatorname{tg} 46°$;

e) $0{,}97^{1{,}05}$.

3246. Cu cît variază diagonala şi aria unui dreptunghi de laturi $x=6$ m şi $y=8$ m, dacă mărim prima latură cu 2 mm, iar latura a doua o micşorăm cu 5 mm?

3247. Mărim unghiul la centru al unui sector circular de deschidere $\alpha=60°$ cu $\Delta\alpha=1°$. Cu cît trebuie micşorată raza sectorului $R=20$ cm pentru ca aria acestuia să rămînă nemodificată?

3248. Să se demonstreze că eroarea relativă a unui produs este aproximativ egală cu suma erorilor relative ale factorilor.

3249. Măsurînd raza bazei R şi înălţimea H a unui cilindru, s-au obţinut următoarele date:

$$R=2{,}5\ \text{m}\pm 0{,}1\ \text{m};\quad H=4{,}0\ \text{m}\pm 0{,}2\ \text{m}.$$

Cu ce eroare absolută Δ şi cu ce eroare relativă δ poate fi calculat volumul acestui cilindru?

3250. Laturile unui triunghi sînt $a=200$ m ± 2 m, $b=300$ m ± 5 m şi unghiul dintre aceste laturi $C=60° \pm 1°$. Cu ce eroare absolută poate fi calculată cea de a treia latură c a triunghiului?

3251. Să se arate că funcţia

$$f(x, y)=\sqrt{|xy|},$$

continuă în punctul $(0, 0)$, are în acest punct ambele derivate parţiale $f'_x(0, 0)$ şi $f'_y(0, 0)$, fără a fi derivabilă în punctul $(0, 0)$.

Să se explice comportarea derivatelor $f'_x(x, y)$ şi $f'_y(x, y)$ în vecinătatea punctului $(0, 0)$.

3252. Să se arate că funcţia

$$f(x, y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \text{cu} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

şi

$$f(0, 0)=0,$$

este continuă în vecinătatea punctului $(0, 0)$, admiţînd derivatele parţiale $f'_x(x, y)$ şi $f'_y(x, y)$ în această vecinătate, fără a fi derivabilă în punctul $(0, 0)$.

3253. Să se arate că deşi funcţia

$$f(x, y)=(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \quad \text{cu} \quad x^2+y^2 \neq 0$$

şi

$$f(0, 0)=0,$$

are în vecinătatea punctului $(0, 0)$ derivate parţiale $f'_x(x, y)$ şi $f'_y(x, y)$, discontinue în punctul $(0, 0)$ şi nemărginite în orice vecinătate a acestui punct, totuşi ea este derivabilă în punctul $(0, 0)$.

3254. Să se demonstreze că o funcţie $f(x, y)$, care are derivatele parţiale $f'_x(x, y)$ şi $f'_y(x, y)$ mărginite într-un anumit domeniu convex E, este uniform continuă în acest domeniu.

3255. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă în raport cu variabila x pentru orice y fixat şi are derivata parţială $f'_y(x, y)$ în raport cu y mărginită, atunci această funcţie este continuă în raport cu ansamblul variabilelor x şi y.

Să se calculeze derivatele parţiale indicate în problemele următoare:

3256. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, dacă

$$u=x-y+x^2+2xy+y^2+x^3-3x^2y-y^3+x^4-4x^2y^2+y^4.$$

3257. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, dacă $u=x\ln(xy)$.

3258. $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, dacă $u=x^3\sin y+y^3\sin x$.

3259. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, dacă $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

3260. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, dacă $u=e^{xyz}$.

3261. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$, dacă $u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}$.

3262. $\dfrac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}$ dacă $u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$.

3263. $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, dacă $u=\dfrac{x+y}{x-y}$.

3264. $\dfrac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, dacă $u=(x^2+y^2)e^{x+y}$.

3265. $\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, dacă $u=xyze^{x+y+z}$.

3266. Să se calculeze $f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0, 0)$, dacă $f(x, y)=e^x\sin y$.

3267. Să se arate că dacă

$$u=f(xyz),$$

atunci

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}=F(t),$$

unde $t=xyz$, şi să se găsească funcţia F.

3268. Să se calculeze d^4u, dacă

$$u=x^4-2x^3y-2xy^3+y^4+x^3-3x^2y-3xy^2+y^3+$$
$$+2x^2-xy+2y^2+x+y+1.$$

Cu ce sînt egale derivatele $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ şi $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$?

Să se calculeze diferenţialele totale de ordinul indicat în exemplele următoare:

3269. d^3u, dacă $u=x^3+y^3-3xy(x-y)$.

3270. d^3u, dacă $u=\sin(x^2+y^2)$.

3271. $d^{10}u$, dacă $u=\ln(x+y)$.

3272. d^6u, dacă $u=\cos x \operatorname{ch} y$.

3273. d^3u, dacă $u=xyz$.

3274. d^4u, dacă $u=\ln(x^x y^y z^z)$.

3275. d^nu, dacă $u=e^{ax+by}$.

3276. d^nu, dacă $u=X(x)Y(y)$.

3277. d^nu, dacă $u=f(x+y+z)$.

3278. d^nu, dacă $u=e^{ax+by+cz}$.

3279. Fie $P_n(x, y, z)$ un polinom omogen de gradul n. Să se demonstreze că

$$d^nP_n(x, y, z)=n!\, P_n(dx, dy, dz).$$

3280. Fie

$$Au=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Să se calculeze Au şi $A^2u=A(Au)$, dacă

a) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$; b) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3281. Fie

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Să se calculeze Δu, dacă

a) $u=\sin x \operatorname{ch} y$; b) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

3282. Fie

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

şi

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Să se calculeze $\Delta_1 u$ şi $\Delta_2 u$, dacă

a) $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$; b) $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Să se calculeze derivatele de ordinul întîi şi al doilea ale următoarelor funcţii compuse:

3283. $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

3284. $u=f\left(x, \frac{x}{y}\right)$.

3285. $u=f(x, xy, xyz)$.

3286. Să se calculeze $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, dacă

$$u=f(x+y, xy).$$

3287. Să se calculeze

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

dacă

$$u=f(x+y+z, x^2+y^2+z^2).$$

Să se calculeze diferenţialele totale de ordinul întîi şi al doilea pentru următoarele funcţii compuse (x, y şi z fiind variabile independente):

3288. $u=f(t)$, unde $t=x+y$.

3289. $u=f(t)$, unde $t=\frac{y}{x}$.

3290. $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

3291. $u=f(t)$, unde $t=xyz$.

3292. $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

3293. $u=f(\xi, \eta)$, unde $\xi=ax$, $\eta=by$.

3294. $u=f(\xi, \eta)$, unde $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

3295. $u=f(\xi, \eta)$, unde $\xi=xy$, $\eta=\frac{x}{y}$.

3296. $u=f(x+y, z)$.

3297. $u=f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$.

3298. $u=f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3299. $u=f(x, y, z)$, unde $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

3300. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, unde $\xi=ax$, $\eta=by$, $\zeta=cz$.

3301. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, unde $\xi=x^2+y^2$, $\eta=x^2-y^2$, $\zeta=2xy$.

Să se calculeze $d^n u$, dacă:

3302. $u=f(ax+by+cz)$. **3303.** $u=f(ax, by, cz)$.

3304. $u=f(\xi, \eta, \zeta)$, unde $\xi=a_1x+b_1y+c_1z$, $\eta=a_2x+b_2y+c_2z$, $\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$.

3305. Să presupunem că $u=f(r)$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ şi f este o funcţie de două ori derivabilă. Să se arate că

$$\Delta u=F(r),$$

unde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ este operatorul lui Laplace, şi să se determine funcţia F.

3306. Fie u şi v două funcţii de două ori derivabile şi Δ operatorul lui Laplace (v. problema 3305). Să se demonstreze că

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u, v),$$

unde

$$\Delta(u, v)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

3307. Să se arate că funcţia

$$u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

(a şi b fiind constante) verifică ecuaţia lui Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

3308. Să se demonstreze că dacă funcţia $u=u(x, y)$ satisface ecuaţia lui Laplace (v. problema 3307), atunci funcţia

$$v=u\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

satisface şi ea această ecuaţie.

3309. Să se arate că funcţia

$$u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}},$$

(a şi b fiind constante) verifică *ecuaţia căldurii*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3310. Să se demonstreze că dacă funcţia $u=u(x,t)$ verifică ecuaţia căldurii (v. problema 3309), atunci funcţia

$$v=\frac{1}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{1}{t}\right) \qquad (t>0)$$

verifică şi ea această ecuaţie.

3311. Să se demonstreze că funcţia

$$u=\frac{1}{r},$$

unde $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, satisface pentru $r\neq 0$ *ecuaţia lui Laplace*

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

3312. Să se demonstreze că dacă funcţia $u=u(x, y, z)$ satisface ecuaţia lui Laplace (v. problema 3311), funcţia

$$v=\frac{1}{r}u\left(\frac{k^2x}{r^2}, \frac{k^2y}{r^2}, \frac{k^2z}{r^2}\right),$$

unde k este o constantă şi $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, satisface şi ea această ecuaţie.

3313. Să se demonstreze că funcţia

$$u=\frac{C_1e^{-ar}+C_2e^{ar}}{r},$$

unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ şi C_1, C_2 sînt constante, verifică *ecuaţia lui Helmholtz*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2u.$$

3314. Să presupunem că funcţiile $u_1=u_1(x, y, z)$ şi $u_2=u_2(x, y, z)$ verifică ecuaţia lui Laplace $\Delta u=0$.

Să se demonstreze că funcţia

$$v=u_1(x, y, z)+(x^2+y^2+z^2)u_2(x, y, z)$$

verifică *ecuaţia biarmonică*

$$\Delta(\Delta v)=0.$$

3315. Să presupunem că $f(x, y, z)$ este o funcție de m ori derivabilă și omogenă de gradul n.

Să se demonstreze că

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x, y, z)=n(n-1)\ldots(n-m+1)\,f(x, y, z).$$

3316. Să se simplifice expresia

$$\sec x\,\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\,\frac{\partial z}{\partial y},$$

dacă

$$z=\sin y+f(\sin x-\sin y),$$

f fiind o funcție derivabilă.

3317. Să se arate că funcția

$$z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right),$$

unde f este o funcție derivabilă arbitrară, satisface ecuația

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz.$$

3318. Să se arate că

$$z=yf(x^2-y^2),$$

f fiind o funcție derivabilă arbitrară, satisface ecuația

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz.$$

3319. Să se simplifice expresia

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z},$$

dacă

$$u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x, z-x),$$

f fiind o funcție derivabilă.

3320. Fie

$$x^2=vw,\quad y^2=uw,\quad z^2=uv$$

și

$$f(x, y, z)=F(u, v, w).$$

Să se demonstreze că

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w.$$

Presupunînd că derivatele funcțiilor φ și ψ etc. sînt derivabile de un număr suficient de ori, să se verifice următoarele egalități:

3321. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$ dacă $z=\varphi(x^2+y^2)$.

3322. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0,$ dacă $z=\frac{y^2}{3x}+\varphi(xy)$.

3323. $(x^2-y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz,$ dacă $z=e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$.

3324. $x\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha y\frac{\partial u}{\partial y}+\beta z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$ dacă $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$.

3325. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z},$ dacă $u=$
$=\frac{xy}{z}\ln x+x\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

3326. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ dacă $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$.

3327. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ dacă $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$.

3328. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$ dacă $u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+$
$+x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3329. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u,$
dacă $u=x^n\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

3330. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$ dacă $u=\varphi[x+\psi(y)]$.

Să se elimine prin derivări succesive funcțiile arbitrare φ și ψ:

3331. $z=x+\varphi(xy)$.

3332. $z=x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

3333. $z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

3334. $u=\varphi(x-y, y-z)$.

3335. $u=\varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

3336. $z=\varphi(x)+\psi(y)$.

3337. $z=\varphi(x)\psi(y)$.

3338. $z=\varphi(x+y)+\psi(x-y)$.

3339. $z=x\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+y\psi\left(\frac{x}{y}\right)$. **3340.** $z=\varphi(xy)+\psi\left(\frac{x}{y}\right)$.

3341. Să se calculeze derivata funcţiei

$$z=x^2-y^2$$

în punctul M (1, 1) după direcţia l, care face cu direcţia pozitivă a axei Ox un unghi $\alpha=60°$.

3342. Să se calculeze derivata funcţiei

$$z=x^2-xy+y^2$$

în punctul M (1, 1) după direcţia l, care face un unghi α cu direcţia pozitivă a axei Ox. Pentru ce direcţie are această derivată: a) valoarea maximă; b) valoarea minimă; c) valoarea egală cu zero.

3343. Să se calculeze derivata funcţiei

$$z=\ln(x^2+y^2)$$

în punctul M (x_0, y_0) după direcţia perpendiculară la linia de nivel, care trece prin acest punct.

3344. Să se calculeze derivata funcţiei

$$z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

în punctul $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ după direcţia normalei interioare în acest punct la curba

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

3345. Să se calculeze derivata funcţiei

$$u=xyz$$

în punctul M (1, 1, 1) după direcţia $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Care este valoarea gradientului funcţiei în acest punct?

3346. Să se afle mărimea, direcţia şi sensul gradientului funcţiei

$$u=\frac{1}{r}$$

în punctul M_0 (x_0, y_0, z_0), unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

3347. Să se afle unghiul dintre gradienţii funcţiei

$$u=x^2+y^2-z^2$$

în punctele A (ε, 0, 0) şi B (0, ε, 0).

3348. Cu cît diferă în punctul M (1, 2, 2) mărimea gradientului funcţiei

$$u=x+y+z$$

de mărimea gradientului funcţiei

$$v=x+y+z+0{,}001\sin(10^6\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2})?$$

3349. Să se arate că în punctul M_0 (x_0, y_0, z_0) unghiul dintre gradienţii funcţiilor

$$u=ax^2+by^2+cz^2$$

şi

$$v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

(a, b, c, m, n, p sînt constante şi $a^2+b^2+c^2\neq 0$) tinde către zero dacă punctul M_0 se îndepărtează spre infinit.

3350. Fie $u=f(x, y, z)$ o funcţie de două ori derivabilă. Să se calculeze $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$, dacă $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sînt cosinuşii directori ai direcţiei l.

3351. Fie $u=f(x, y, z)$ o funcţie de două ori derivabilă şi

$$l_1\{\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1\},\quad l_2\{\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2\},$$
$$l_3\{\cos\alpha_3, \cos\beta_3, \cos\gamma_3\}$$

trei direcţii perpendiculare între ele.

Să se demonstreze că

a) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

3352. Să presupunem că $u=u(x, y)$ este o funcţie derivabilă şi că pentru $y=x^2$ avem:

$$u(x, y)=1 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=x.$$

Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial y}$ pentru $y=x^2$.

3353. Să presupunem că funcţia $u=u(x, y)$ verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

şi că, în afară de aceasta, mai verifică şi condiţiile:

$$u(x, 2x)=x, \quad u'_x(x, 2x)=x^2.$$

Să se calculeze

$$u''_{xx}(x, 2x), \quad u''_{xy}(x, 2x), \quad u''_{yy}(x, 2x).$$

Punînd $z=z(x, y)$ să se rezolve următoarele ecuaţii:

3354. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0.$ **3355.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0.$ **3356.** $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}=0.$

3357. Punînd $u=u(x, y, z)$, să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}=0.$$

3358. Să se găsească soluţia $z=z(x, y)$ a ecuaţiei

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y,$$

care satisface condiţia: $z(x, x^2)=1$.

3359. Să se găsească soluţia $z=z(x, y)$ a ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,$$

satisfăcînd condiţiile: $z(x, 0)=1$, $z'_y(x, 0)=x$.

3360. Să se găsească soluţia $z=z(x, y)$ a ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=x+y,$$

care satisface condiţiile: $z(x, 0)=x$, $z(0, y)=y^2$.

§ 3. Derivarea funcţiilor implicite

1°. **Teorema de existenţă.** Dacă: 1) funcţia $F(x, y, z)$ se anulează într-un punct $\widehat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$; 2) $F(x, y, z)$ şi $F'_z(x, y, z)$ sînt definite şi continue în vecinătatea punctului $\widehat{A}_0$; 3) $F'_z(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, atunci într-o vecinătate oarecare suficient de mică a punctului $A_0(x_0, y_0)$ există o funcţie continuă unică

$$z=f(x, y), \tag{1}$$

care satisface ecuaţia

$$F(x, y, z)=0$$

şi astfel încît $z_0=f(x_0, y_0)$.

2°. **Derivabilitatea unei funcţii implicite.** Dacă 4) funcţia $F(x, y, z)$ mai este şi derivabilă în vecinătatea punctului $\widehat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$, atunci funcţia (1) este derivabilă în vecinătatea punctului $A_0(x_0, y_0)$ şi derivatele sale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ pot fi determinate cu ajutorul ecuaţiilor

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0. \tag{2}$$

Dacă funcţia $F(x, y, z)$ este derivabilă de un număr suficient de ori, atunci, derivînd succesiv egalităţile (2) se pot calcula, de asemenea, derivatele de ordin superior ale funcţiei z.

3°. **Funcţii implicite definite printr-un sistem de ecuaţii.** Să presupunem că funcţiile $F_i(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_n)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ satisfac următoarele condiţii:

1) se anulează în punctul $\widehat{A}_0(x_{10}, \ldots, x_{m0};\ y_{10}, \ldots, y_{n0})$;

2) sînt derivabile în vecinătatea punctului $\widehat{A}_0$;

3) determinantul funcţional $\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\neq 0$ în punctul $\widehat{A}_0$.

In acest caz sistemul de ecuaţii

$$F_i(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_n)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

defineşte în mod unic, într-o anumită vecinătate a punctului $A_0(x_{10}, \ldots, x_{m0})$, sistemul de funcţii derivabile

$$y_i=f_i(x_1, \ldots, x_m) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

care satisfac ecuaţiile (3) şi condiţiile iniţiale

$$f_i(x_{10}, \ldots, x_{m0})=y_{i0} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Diferenţialele acestor funcţii implicite pot fi determinate cu ajutorul sistemului

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}dx_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}dy_k=0$$

$(i=1, 2, \ldots, n)$ [1].

[1]) In formularea majorităţii problemelor din acest capitol vom presupune, fără a mai menţiona în mod special, că sînt satisfăcute condiţiile de existenţă ale funcţiilor implicite şi ale derivatelor lor.

3361. Să se arate că funcţia lui Dirichlet

$$y=\begin{cases}1, & \text{dacă } x \text{ este raţional,}\\ 0, & \text{dacă } x \text{ este iraţional,}\end{cases}$$

discontinuă în orice punct, verifică ecuaţia

$$y^2-y=0.$$

3362. Să presupunem că o funcţie $f(x)$ este definită în intervalul (a, b). In ce caz are ecuaţia

$$f(x)\,y=0,$$

pentru $a<x<b$, o soluţie continuă unică $y=0$?

3363. Să presupunem că funcţiile $f(x)$ şi $g(x)$ sînt definite şi continue in intervalui (a, b). In ce caz are ecuaţia

$$f(x)\,y=g(x)$$

o soluţie continuă unică în intervalul (a, b)?

3364. Fie dată ecuaţia

$$x^2+y^2=1 \qquad (1)$$

şi fie

$$y=y(x) \quad (-1\leqq x\leqq 1) \qquad (2)$$

o funcţie uniformă satisfăcînd ecuaţia (1).

1. Cîte funcţii uniforme (2) satisfac ecuaţia (1)?

2. Cîte funcţii uniforme continue (2) satisfac ecuaţia (1)?

3. Cîte funcţii uniforme continue (2) satisfac ecuaţia (1) dacă: a) $y(0)=1$; b) $y(1)=0$?

3365. Fie dată ecuaţia

$$x^2=y^2 \qquad (1)$$

şi fie

$$y=y(x) \quad (-\infty<x<+\infty) \qquad (2)$$

o funcţie uniformă care satisface ecuaţia (1).

1. Cîte funcţii uniforme (2) satisfac ecuaţia (1)?

2. Cîte funcţii uniforme continue (2) satisfac ecuaţia (1)?

3. Cîte funcţii uniforme derivabile (2) satisfac ecuaţia (1)?

4. Cîte funcţii uniforme continue (2) satisfac ecuaţia (1) dacă: a) $y(1)=1$; b) $y(0)=0$?

5. Cîte funcţii uniforme continue $y=y(x)$ $(1-\delta<x<1+\delta)$ satisfac ecuaţia (1) dacă $y(1)=1$ şi δ este suficient de mic?

3366. Ecuaţia

$$x^2+y^2=x^4+y^4$$

îl defineşte pe y ca o funcţie multiformă de x. In ce domenii această funcţie 1) este uniformă, 2) are două determinări, 3) are trei determinări, 4) are patru determinări? Să se determine punctele de ramificare ale acestei funcţii şi ramurile sale continue şi uniforme.

3367. Să se determine punctele de ramificare şi ramurile continue uniforme $y=y(x)$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ ale funcţiei multiforme y, definită de ecuaţia

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2.$$

3368. Să presupunem că funcţia $f(x)$ este continuă pentru $a<x<b$ şi că $\varphi(y)$ este o funcţie monoton crescătoare şi continuă pentru $c<y<d$. In ce caz ecuaţia

$$\varphi(y)=f(x)$$

defineşte o funcţie uniformă

$$y=\varphi^{-1}(f(x))?$$

Să se considere exemplele: a) $\sin y+\operatorname{sh} y=x$; b) $e^{-y}=-\sin^2 x$.

3369. Fie

$$x=y+\varphi(y), \qquad (1)$$

unde $\varphi(0)=0$ şi $|\varphi'(y)|\leqq k<1$ pentru $-a<y<a$. Să se demonstreze că pentru $-\varepsilon<x<\varepsilon$ există o funcţie derivabilă unică $y=y(x)$, care satisface ecuaţia (1) şi astfel încît $y(0)=0$.

3370. Fie $y=y(x)$ o funcţie implicită definită de ecuaţia

$$x=ky+\varphi(y),$$

unde constanta $k\neq 0$ şi $\varphi(y)$ este o funcţie derivabilă periodică de perioadă ω, astfel încît $|\varphi'(y)|<|k|$. Să se demonstreze că

$$y=\frac{x}{k}+\psi(x),$$

unde $\psi(x)$ este o funcţie periodică de perioadă $\frac{\omega}{|k|}$.

Să se calculeze y' şi y'' pentru funcţiile y, definite de următoarele ecuaţii:

3371. $x^2+2xy-y^2=a^2$.

3372. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3373. $y-\varepsilon\sin y=x \quad (0<\varepsilon<1)$.

3374. $x^y=y^x \quad (x\neq y)$.

3375. $y=2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3376. Să se demonstreze că pentru

$$1+xy=k(x-y),$$

k fiind o mărime constantă, are loc egalitatea

$$\frac{dx}{1+x^2}=\frac{dy}{1+y^2}.$$

3377. Să se demonstreze că dacă

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0,$$

atunci pentru $xy>0$ are loc egalitatea

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0.$$

3378. Să se demonstreze că ecuaţia

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \quad (a\neq 0)$$

defineşte în vecinătatea punctului $x=0$, $y=0$ două funcţii derivabile: $y=y_1(x)$ şi $y=y_2(x)$. Să se calculeze $y_1'(0)$ şi $y_2'(0)$.

3379. Să se calculeze y' în punctul $x=0$ şi $y=0$, dacă

$$(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3.$$

3380. Să se calculeze y', y'' şi y''', dacă $x^2+xy+y^2=3$.

3381. Să se calculeze y', y'' şi y''' pentru $x=0$, $y=1$, dacă

$$x^2-xy+2y^2+x-y-1=0.$$

3382. Să se demonstreze că pentru curba de gradul al doilea

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

are loc egalitatea

$$\frac{d^3}{dx^3}\left[(y'')^{-\frac{2}{3}}\right]=0.$$

Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întîi şi al doilea ale funcţiei $z=z(x, y)$, dacă:

3383. $x^2+y^2+z^2=a^2$.

3384. $z^3-3xyz=a^3$.

3385. $x+y+z=e^z$.

3386. $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

3387. $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$.

3388. Fie

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \qquad (1)$$

şi

$$f(x, y, z)=xy^2z^3.$$

Să se calculeze: a) $f_x'(1, 1, 1)$ dacă $z=z(x, y)$ este o funcţie implicită definită de ecuaţia (1); b) $f_x'(1, 1, 1)$ dacă $y=y(x, z)$ este o funcţie implicită definită de ecuaţia (1). Să se arate de ce sînt diferite aceste derivate.

3389. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ pentru $x=1, y=-2, z=1$, dacă $x^2+2y^2+3z^3+xy-z-9=0$.

Să se calculeze dz şi d^2z, dacă:

3390. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3391. $xyz=x+y+z$.

3392. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$.

3393. $z=x+\operatorname{arctg}\frac{y}{z-x}$.

3394. Să se calculeze du, dacă

$$u^3-3(x+y)u^2+z^3=0.$$

3395. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, dacă $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$.

3396. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$, dacă $F(x-y, y-z, z-x)=0$.

3397. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ şi $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, dacă $F(x, x+y, x+y+z)=0$.

3398. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, dacă $F(xz, yz)=0$.

3399. Să se calculeze d^2z, dacă:

a) $F(x+z, y+z)=0$; b) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$.

3400. Fie $x=x(y, z)$, $y=y(x, z)$, $z=z(x, y)$ funcţii definite de ecuaţia $F(x, y, z)=0$.

Să se demonstreze că

$$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

3401. Să se calculeze $\frac{dx}{dz}$ şi $\frac{dy}{dz}$, dacă $x+y+z=0$, x^2+y^2+ $+z^2=1$.

3402. Să se calculeze $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$ şi $\frac{d^2y}{dz^2}$ pentru $x=1$, $y=-1$, $z=2$, dacă $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$, $x+y+z=2$.

3403. Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ şi $\frac{\partial v}{\partial y}$, dacă $xu-yv=0$, $yu+xv=1$.

3404. Să se calculeze du, dv, d^2u şi d^2v, dacă

$$u+v=x+y, \quad \frac{\sin u}{\sin v}=\frac{x}{y}.$$

3405. Să se calculeze du, dv, d^2u şi d^2v pentru $x=1$, $y=1$, $u=0$, $v=\frac{\pi}{4}$, dacă

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}.$$

3406. Fie

$$x=t+t^{-1}, \quad y=t^2+t^{-2}, \quad z=t^3+t^{-3}.$$

Să se calculeze $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ şi $\frac{d^2z}{dx^2}$.

3407. In ce domeniu al planului Oxy, sistemul de ecuaţii

$$x=u+v, \quad y=u^2+v^2, \quad z=u^3+v^3$$

defineşte pe z ca o funcţie de variabilele x şi y, dacă parametrii u şi v iau toate valorile reale posibile? Să se calculeze derivatele $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3408. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, dacă

$$x=\cos\varphi\cos\psi, \quad y=\cos\varphi\sin\psi, \quad z=\sin\varphi.$$

3409. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ şi $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, dacă

$$x=u\cos v, \quad y=u\sin v, \quad z=v.$$

3410. Fie $z=z(x,y)$ o funcţie definită de sistemul de ecuaţii

$$x=e^{u+v}, \quad y=e^{u-v}, \quad z=uv,$$

(u şi v sînt nişte parametri). Să se calculeze dz şi d^2z pentru $u=0$ şi $v=0$.

3411. Să se calculeze $\frac{dz}{dx}$ şi $\frac{d^2z}{dx^2}$, dacă

$$z=x^2+y^2,$$

unde $y=y(x)$ se determină din ecuaţia

$$x^2-xy+y^2=1.$$

3412. Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}$, dacă

$$u=\frac{x+z}{y+z},$$

unde z este definită de ecuaţia

$$ze^z=xe^x+ye^y.$$

3413. Să presupunem că ecuaţiile

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\psi(u,v), \quad z=\chi(u,v)$$

definesc pe z ca o funcţie de x şi y. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3414. Fie

$$x=\varphi(u,v), \quad y=\psi(u,v).$$

Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întîi şi al doilea ale funcţiilor inverse $u=u(x,y)$ şi $v=v(x,y)$.

3415. Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, dacă:

a) $x=u\cos\frac{v}{u}$, $y=u\sin\frac{v}{u}$; b) $x=e^u+u\sin v$, $y=e^u-u\cos v$.

3416. Funcţia $u=u(x)$ este definită de sistemul de ecuaţii

$$u=f(x,y,z), \quad g(x,y,z)=0, \quad h(x,y,z)=0.$$

Să se calculeze $\frac{du}{dx}$ şi $\frac{d^2u}{dx^2}$.

3417. Funcţia $u=u(x,y)$ este definită de sistemul de ecuaţii

$$u=f(x,y,z,t), \quad g(y,z,t)=0, \quad h(z,t)=0.$$

Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}$ şi $\frac{\partial u}{\partial y}$.

3418. Fie

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w).$$

Să se calculeze $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ şi $\frac{\partial u}{\partial z}$.

3419. Să presupunem că funcţia $z=z(x,y)$ verifică sistemul de ecuaţii

$$f(x,y,z,t)=0,\quad g(x,y,z,t)=0,$$

unde t este un parametru variabil. Să se calculeze dz.

3420. Fie $u=f(z)$, unde z este o funcţie implicită de variabilele x şi y, definită de ecuaţia $z=x+y\varphi(z)$.

Să se demonstreze *formula lui Lagrange*

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{[\varphi(z)]^n\frac{\partial u}{\partial x}\right\}.$$

Indicaţie. Se va demonstra formula pentru $n=1$ şi se va aplica metoda inducţiei complete.

3421. Să se arate că funcţia $z=z(x,y)$, definită de ecuaţia

$$\Phi(x-az,\ y-bz)=0, \tag{1}$$

unde $\Phi(u,\ v)$ este o funcţie derivabilă arbitrară de variabilele u şi v (a, b sînt constante), este soluţia ecuaţiei

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

Să se arate proprietăţile geometrice ale suprafeţei (1).

3422. Să se arate că funcţia $z=z(x,y)$, definită de ecuaţia

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\ \frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0, \tag{2}$$

unde $\Phi(u,v)$ este o funcţie derivabilă oarecare de variabilele u şi v, verifică ecuaţia

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$

Să se arate proprietăţile geometrice ale suprafeţei (2).

3423. Să se arate că funcţia $z=z(x,y)$, definită de ecuaţia

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2), \tag{3}$$

unde $\Phi(u)$ este o funcţie derivabilă arbitrară de variabila u şi a, b şi c sînt constante, satisface ecuaţia

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

Să se pună în evidenţă proprietăţile geometrice ale suprafeţei (3).

3424. Funcţia $z=z(x,y)$ este dată de ecuaţia

$$x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right).$$

Să se arate că

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

3425. Funcţia $z=z(x,y)$ este dată de ecuaţia

$$F(x+zy^{-1},\ y+zx^{-1})=0.$$

Să se arate că

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

3426. Să se arate că funcţia $z=z(x,y)$, definită de sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z&=f(\alpha),\\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha&=f'(\alpha),\end{aligned}\right\}$$

unde $\alpha=\alpha(x,y)$ este un parametru variabil şi $f(\alpha)$ este o funcţie derivabilă oarecare, verifică ecuaţia

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2.$$

3427. Să se arate că funcţia

$$z=z(x,y),$$

definită de sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} z&=\alpha x+\frac{y}{\alpha}+f(\alpha),\\ 0&=y-\frac{y}{\alpha^2}+f'(\alpha),\end{aligned}\right\}$$

verifică ecuaţia

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

3428. Să se arate că funcția $z=z(x, y)$, definită de ecuațiile

$$\left.\begin{aligned}[z-f(\alpha)]^2&=x^2(y^2-\alpha^2),\\ [z-f(\alpha)]f'(\alpha)&=\alpha x^2,\end{aligned}\right\}$$

verifică ecuația

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

3429. Să se arate că funcția $z=z(x, y)$, dată de ecuațiile

$$\left.\begin{aligned}z&=\alpha x+y\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),\\ 0&=x+y\varphi'(\alpha)+\psi'(\alpha),\end{aligned}\right\}$$

verifică ecuația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0.$$

3430. Să se arate că funcția implicită $z=z(x, y)$, definită de ecuația

$$y=x\varphi(z)+\psi(z),$$

satisface ecuația

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

§ 4. Schimbarea de variabile

1°. Schimbarea de variabile în expresiile care conțin derivate ordinare. Să presupunem că ni se cere să trecem în expresia diferențială

$$A=\Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \ldots)$$

la variabile noi: t este variabila independentă și u este o funcție legată de variabilele precedente x, y prin ecuațiile

$$x=f(t, u), \quad y=g(t, u), \tag{1}$$

Derivînd ecuațiile (1), vom avea:

$$y'_x=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial t}+\dfrac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial u}u'_t}.$$

In mod analog se exprimă derivatele de ordin superior $y''_{xx}, \ldots$ Obținem în cele din urmă

$$A=\Phi_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \ldots).$$

2°. Schimbarea de variabile în expresiile care conțin derivate parțiale. Dacă în expresia diferențială

$$B=F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right)$$

punem

$$x=f(u, v), \quad y=g(u, v), \tag{2}$$

unde u și v sînt variabilele independente noi, atunci derivatele parțiale succesive $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... se calculează din următoarele ecuații;

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

etc.

3°. Schimbarea variabilelor independente și a funcției în expresii care conțin derivate parțiale. In cazul mai general, în care avem ecuațiile

$$x=f(u, v, w), \quad y=g(u, v, w), \quad z=h(u, v, w), \tag{3}$$

unde u, v sînt variabilele independente noi și $w=w(u, v)$ este noua funcție, obținem pentru derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... următoarele ecuații:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

etc.

In unele cazuri este comod să folosim diferențialele totale pentru schimbarea de variabile.

3431. Să se transforme ecuația

$$y'y'''-3y''^2=x,$$

luînd pe y ca noua variabilă independentă.

3432. Să se transforme în același mod ecuația

$$y'^2y^{IV}-10y'y''y'''+15y''^3=0.$$

3433. Să se transforme ecuația

$$y''+\frac{2}{x}y'+y=0,$$

luînd pe x ca funcţie necunoscută şi $t=xy$ ca variabilă independentă.

Introducînd variabile noi, să se transforme următoarele ecuaţii diferenţiale ordinare:

3434. $x^2y''+xy'+y=0$, dacă $x=e^t$.

3435. $y'''=\frac{6y}{x^3}$, dacă $t=\ln|x|$.

3436. $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$, dacă $x=\cos t$.

3437. $y''+y'\operatorname{th} x+\frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 x}y=0$, dacă $x=\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}$.

3438. $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, dacă $y=ue^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(\xi)\,d\xi}$.

3439. $x^4y''+xyy'-2y^2=0$, dacă $x=e^t$ şi $y=ue^{2t}$, unde $u=u(t)$.

3440. $(1+x^2)^2y''=y$, dacă $x=\operatorname{tg} t$ şi $y=\frac{u}{\cos t}$, unde $u=u(t)$.

3441. $(1-x^2)^2y''=-y$, dacă $x=\operatorname{th} t$ şi $y=\frac{u}{\operatorname{ch} t}$, unde $u=u(t)$.

3442. $y''+(x+y)(1+y')^3=0$, dacă $x=u+t$ şi $y=u-t$, unde $u=u(t)$.

3443. $y'''-x^3y''+xy'-y=0$, dacă $x=\frac{1}{t}$ şi $y=\frac{u}{t}$, unde $u=u(t)$.

3444. Să se transforme *ecuaţia lui Stokes*

$$y''=\frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2},$$

punînd

$$u=\frac{y}{x-b},\quad t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$$

şi luînd pe u ca funcţie necunoscută de variabila t.

3445. Să se arate că dacă ecuaţia

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

se transformă prin substituţia $x=\varphi(\xi)$ în ecuaţia

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+P(\xi)\frac{dy}{d\xi}+Q(\xi)y=0,$$

atunci

$$[2P(\xi)Q(\xi)+Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}}=[2p(x)q(x)+q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}.$$

3446. Să se pună în ecuaţia

$$\Phi(y, y', y'')=0,$$

unde Φ este o funcţie omogenă de variabilele y, y', y'',

$$y=e^{\int_{x_0}^{x} u\,dx}.$$

3447. Să se pună, în ecuaţia

$$F(x^2y'', xy', y)=0,$$

unde F este o funcţie omogenă de variabilele sale,

$$u=x\frac{y'}{y}.$$

3448. Să se demonstreze că ecuaţia

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0$$

nu-şi schimbă forma printr-o transformare omografică

$$x=\frac{a_1\xi+b_1\eta+c_1}{a\xi+b\eta+c},\quad y=\frac{a_2\xi+b_2\eta+c_2}{a\xi+b\eta+c}.$$

Indicaţie. Transformarea dată se poate pune sub forma unei succesiuni de transformări mai simple:

$$x=\alpha X+\beta Y+\gamma,\quad y=Y,$$

$$X=\frac{1}{X_1},\qquad Y=\frac{Y_1}{X_1}$$

şi

$$X_1=a\xi+b\eta+c,\quad Y_1=a_2\xi+b_2\eta+c_2.$$

3449. Să se demonstreze că *schwartzianul*

$$S[x(t)]=\frac{x'''(t)}{x'(t)}-\frac{3}{2}\left[\frac{x''(t)}{x'(t)}\right]^2$$

nu-şi schimbă valoarea dacă facem transformarea

$$y=\frac{ax(t)+b}{cx(t)+d}\qquad (ad-bc\neq 0).$$

Să se treacă la coordonatele polare r şi φ, punînd $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ în următoarele ecuaţii:

3450. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.

3451. $(xy'-y)^2=2xy(1+y'^2)$.

3452. $(x^2+y^2)^2y''=(x+yy')^3$.

3453. Să se scrie în coordonate polare expresia

$$\frac{x+yy'}{xy'-y}.$$

3454. Să se exprime curbura unei curbe plane

$$K=\frac{|y''_{xx}|}{(1+y_x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

în coordonate polare r şi φ.

3455. Să se treacă la coordonate polare în sistemul de ecuaţii

$$\frac{dx}{dt}=y+kx(x^2+y^2),\quad \frac{dy}{dt}=-x+ky(x+y^2).$$

3456. Să se transforme expresia

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2},$$

introducînd noile funcţii $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3457. Prin *transformarea lui Legendre* i se pune în corespondenţă fiecărui punct (x, y) al curbei $y=y(x)$ punctul (X, Y), unde

$$X=y',\quad Y=xy'-y.$$

Să se calculeze Y', Y'' şi Y'''.

Introducînd variabilele independente noi ξ şi η, să se rezolve următoarele ecuaţii:

3458. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$, dacă $\xi=x+y$ şi $\eta=x-y$.

3459. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, dacă $\xi=x$ şi $\eta=x^2+y^2$.

3460. $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ $(a\neq 0)$, dacă $\xi=x$ şi $\eta=y-bz$.

3461. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$, dacă $\xi=x$ şi $\eta=\frac{y}{x}$.

Luînd u şi v ca noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuaţii:

3462. $x\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\frac{\partial z}{\partial y}=xy$, dacă $u=\ln x$ şi $v=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$.

3463. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, dacă $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ şi $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3464. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, dacă

$$u=\frac{y}{x}\quad \text{şi}\quad v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

3465. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}$, dacă

$$u=2x-z^2\quad \text{şi}\quad v=\frac{y}{z}.$$

3466. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z$, dacă

$$u=x+z\quad \text{şi}\quad v=y+z.$$

3467. Să se transforme expresia

$$(z+e^x)\frac{\partial z}{\partial x}+(z+e^y)\frac{\partial z}{\partial y}-(z^2-e^{x+y}),$$

luînd ca noi variabile independente

$$\xi=y+ze^{-x},\quad \eta=x+ze^{-y}.$$

3468. Să se transforme expresia

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

punînd

$$x=uv,\quad y=\frac{1}{2}(u^2-v^2).$$

3469. In ecuația
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$
să se pună
$$\xi=x,\quad \eta=y-x,\quad \zeta=z-x.$$

3470. Să se transforme ecuația
$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{dy}=0,$$
luînd pe x ca funcție necunoscută, iar pe y și z ca variabile independente.

3471. Să se transforme ecuația
$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$
luînd pe x ca funcție necunoscută, iar pe
$$u=y-z,\quad v=y+z$$
ca variabile independente.

3472. Să se transforme expresia
$$A=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$
luînd pe x ca funcție necunoscută și pe
$$u=xz,\quad v=yz$$
ca variabile independente.

3473. In ecuația
$$(y+z+u)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z,$$
să se pună
$$e^{\xi}=x-u,\quad e^{\eta}=y-u,\quad e^{\zeta}=z-u.$$

Să se treacă la noile varibaile u, v, w, unde $w=w(u, v)$, în următoarele ecuații:

3474. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-z)z$, dacă
$$u=x^2+y^2,\quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\quad w=\ln z-(x+y).$$

3475. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, dacă
$$u=x,\quad v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\quad w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}.$$

3476. $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$, dacă
$$u=yz-x,\quad v=xz-y,\quad w=xy-z.$$

3477. $\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$, dacă
$$x=ue^{w},\quad y=ve^{w},\quad z=we^{w}.$$

3478. Să se transforme expresia
$$(x-y):\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$
punînd
$$u=\ln\sqrt{x^2+y^2},\quad v=\operatorname{arctg} z,\quad w=x+y+z,$$
unde $w=w(u, v)$.

3479. Să se transforme expresia
$$A=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y},$$
punînd $u=xe^z$, $v=ye^z$, $w=ze^z$, unde $w=w(u, v)$.

3480. In ecuația
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=u+\frac{xy}{z},$$
să se pună: $\xi=\frac{x}{z}$, $\eta=\frac{y}{z}$, $\zeta=z$, $w=\frac{u}{z}$, unde $w=w(\xi, \eta, \zeta)$.

Să se treacă la coordonatele polare r și φ, punînd $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ în următoarele expresii:

3481. $w=x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}$.

3482. $w=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

3483. $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

3484. $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3485. $w=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

3486. $w=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right).$

3487. Să se pună $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ în expresia

$$I=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3488. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ntroducînd variabilele independente

$$\xi=x-at,\quad \eta=x+at.$$

Luînd u şi v drept noi variabile independente, să se transforme următoarele ecuaţii:

3489. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0,$ dacă

$$u=x+2y+2\quad \text{şi}\quad v=x-y-1.$$

3490. $(1+x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$ dacă

$$u=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\quad \text{şi}\quad v=\ln(y+\sqrt{1+y^2}).$$

3491. $ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ (a, b, c sînt constante), dacă

$$u=\ln x\ \text{şi}\ v=\ln y.$$

3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ dacă

$$u=\frac{x}{x^2+y^2}\quad \text{şi}\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2z=0,$ dacă

$$x=e^u\cos v,\quad y=e^u\sin v.$$

3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ $(y>0)$, dacă

$$u=x-2\sqrt{y}\quad \text{şi}\quad v=x+2\sqrt{y}.$$

3495. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ dacă

$$u=xy\quad \text{şi}\quad v=\frac{x}{y}.$$

3496. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ dacă

$$u=x+y\quad \text{şi}\quad v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

3497. $xy\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$ dacă

$$u=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\quad \text{şi}\quad v=xy.$$

3498. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\sin y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin^2 y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$ dacă

$$u=x\,\mathrm{tg}\frac{y}{2}\quad \text{şi}\quad v=x.$$

3499. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ $(x>0,\ y>0)$, dacă

$$x=(u+v)^2\quad \text{şi}\quad y=(u-v)^2.$$

3500. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3,$ dacă

$$u=x\quad \text{şi}\quad v=y+z.$$

3501. Să se aducă cu ajutorul substituţiei liniare

$$\xi=x+\lambda_1 y,\quad \eta=x+\lambda_2 y$$

ecuaţia

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\tag{1}$$

la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0,$$

unde A, B şi C sînt constante şi $AC-B^2<0$.

Să se găsească forma generală a funcţiei care satisface ecuaţia (1).

3502. Să se demonstreze că forma ecuaţiei lui Laplace

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

este invariantă pentru orice schimbare de variabilă nesingulară

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v)$$

care satisface condiţiile

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}.$$

3503. Să se transforme ecuațiile

$$\text{a)}\ \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;\quad \text{b)}\ \Delta(\Delta u)=0,$$

punînd $u=f(r)$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

3504. Ce formă ia ecuația

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}+cw=0,$$

dacă punem

$$w=f(u),$$

unde $u=(x-x_0)(y-y_0)$?

3505. Să se transforme ecuația

$$A=x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial x},$$

punînd

$$x+y=X,\quad y=XY.$$

3506. Să se arate că ecuația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+x^2y^2z^2=0$$

nu-și schimbă forma prin transformarea de variabile

$$x=uv \quad \text{și} \quad y=\frac{1}{v}.$$

3507. Să se arate că ecuația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

nu-și schimbă forma dacă facem schimbarea de variabile

$$u=x+z \quad \text{și} \quad v=y+z.$$

3508. Să se transforme ecuația

$$xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+yz\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}+xz\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}=0,$$

punînd

$$x=\eta\zeta,\quad y=\xi\zeta,\quad z=\xi\eta.$$

3509. Să se transforme ecuația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3}=0,$$

punînd

$$y_1=x_2+x_3-x_1,\quad y_2=x_1+x_3-x_2,\quad y_3=x_1+x_2-x_3.$$

3510. Să se transforme ecuația

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+2xz\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=0,$$

punînd

$$\xi=\frac{y}{x},\quad \eta=\frac{z}{x},\quad \zeta=y-z.$$

I n d i c a ț i e. Se va scrie ecuația sub forma $A^2u-Au=0$, unde

$$A=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}.$$

3511. Să se scrie expresiile

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

și

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

în coordonate sferice, punînd

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

I n d i c a ț i e. Schimbarea de variabile se poate scrie sub forma unei succesiuni de două schimbări de variabile

$$x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi,\quad z=z$$

și

$$R=r\sin\theta,\quad \varphi=\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

3512. Să se introducă în ecuația

$$z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

o nouă funcție w, punînd $w=z^2$.

Luînd u și v ca variabile independente noi, $w=w(u, v)$ ca funcție necunoscută, să se transforme următoarele ecuații:

3513. $y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$, dacă $u=\dfrac{x}{y}$, $v=x$, $w=xz-y$.

3514. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, dacă $u = x+y$, $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{x}$.

3515. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, dacă $u = x+y$, $v = x-y$, $w = xy - z$.

3516. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$, dacă $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$, $w = ze^y$.

3517. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$,

dacă

$$u = x, \quad v = x+y, \quad w = x+y+z.$$

3518. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$,

dacă

$$x = \sin u, \quad y = \sin v, \quad z = e^w.$$

3519. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4} z = 0$ $(|x| < 1)$, dacă

$$u = \frac{1}{2}(y + \arccos x), \quad v = \frac{1}{2}(y - \arccos x), \quad w = z\sqrt[4]{1-x^2}.$$

3520. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\frac{x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}}{x^2 - y^2} - \frac{3(x^2+y^2)z}{(x^2-y^2)^2}$ $(|x| > |y|)$,

dacă

$$u = x+y, \quad v = x-y, \quad w = \frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

3521. Să se demonstreze că orice ecuaţie de forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c fiind constante) poate fi redusă la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \quad (c_1 = \text{const})$$

prin schimbarea de variabile

$$z = ue^{\alpha x + \beta y},$$

unde α şi β sînt mărimi constante şi $u = u(x, y)$.

3522. Să se arate că ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

nu-şi schimbă forma atunci cînd facem schimbarea de variabile

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}, \quad u' = \frac{u}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}},$$

unde u' este o funcţie de variabilele x' şi y'.

3523. In ecuaţia

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1+p+q+2pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ şi $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, să se pună $u = x+z$, $v = y+z$, $w = x+y+z$, considerînd că $w = w(u, v)$.

3524. In ecuaţia

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

să se pună $x = e^\xi$, $y = e^\eta$, $z = e^\zeta$, $u = e^w$, unde $w = w(\xi, \eta, \zeta)$.

3525. Să se arate că forma ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

nu se modifică, oricare ar fi distribuţia rolurilor între variabilele x, y şi z.

3526. Să se rezolve ecuaţia

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

luînd pe x ca funcţie necunoscută de variabilele y şi z.

3527. Să se transforme ecuaţia

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

folosind *transformarea lui Legendre*

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z,$$

unde $Z = Z(X, Y)$.

§ 5. Aplicații geometrice

1°. **Tangenta și planul normal.** Ecuația *tangentei* la curba

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t)$$

într-un punct al ei $M(x, y, z)$ are forma

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

Ecuația *planului normal* în acest punct este:

$$\frac{dx}{dt}(X-x)+\frac{dy}{dt}(Y-y)+\frac{dz}{dt}(Z-z)=0.$$

2°. **Planul tangent și normala.** Ecuația *planului tangent* la suprafața $z=f(x, y)$ într-un punct al ei $M(x, y, z)$ are forma

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

Ecuația *normalei* în punctul M este

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial x}{\partial y}}=\frac{Z-z}{-1}.$$

Dacă ecuația suprafeței este dată sub forma implicită $F(x, y, z)=0$, atunci avem respectiv:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$$

ecuația planului tangent și

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

ecuația normalei.

3°. **Curba înfășurătoare a unei familii de curbe plane.** *Curba înfășurătoare* a unei familii de curbe $f(x, y, \alpha)=0$ care depind de un parametru (α fiind parametrul) verifică sistemul de ecuații

$$f(x, y, \alpha)=0,\quad f'_\alpha(x, y, \alpha)=0.$$

4°. **Suprafața înfășurătoare a unei familii de suprafețe.** *Suprafața înfășurătoare* a unei familii de suprafețe $F(x, y, z, \alpha)=0$ care depinde de un parametru satisface sistemul de ecuații

$$F(x, y, z, \alpha)=0,\quad F'_\alpha(x, y, z, \alpha)=0.$$

În cazul unei familii de suprafețe $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0$, depinzînd de doi parametri, suprafața înfășurătoare satisface următoarele ecuații:

$$\Phi(x, y, z, \alpha, \beta)=0,\quad \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta)=0,\quad \Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta)=0.$$

Să se scrie ecuațiile tangentelor și ale planelor normale în punctele date ale următoarelor curbe:

3528. $x=a\cos\alpha\cos t$, $y=a\sin\alpha\cos t$, $z=a\sin t$; în punctul $t=t_0$.

3529. $x=a\sin^2 t$, $y=b\sin t\cos t$, $z=c\cos^2 t$; în punctul $t=\frac{\pi}{4}$.

3530. $y=x$, $z=x^2$; în punctul $M(1, 1, 1)$.

3531. $x^2+z^2=10$, $y^2+z^2=10$; în punctul $M(1, 1, 3)$.

3532. $x^2+y^2+z^2=6$, $x+y+z=0$; în punctul $M(1, -2, 1)$.

3533. Să se găsească pe curba $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ punctul în care tangenta este paralelă cu planul $x+2y+z=4$.

3534. Să se demonstreze că tangenta la elicea $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ formează un unghi constant cu axa Oz.

3535. Să se demonstreze că curba

$$x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

intersectează toate generatoarele conului $x^2+y^2=z^2$ sub același unghi.

3536. Să se demonstreze că loxodroma

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)=e^{k\varphi}\qquad (k=\text{const}),$$

unde φ este longitudinea, ψ — latitudinea punctului de pe sferă, intersectează toate meridianele sferei sub un unghi constant.

3537. Să se găsească tangenta unghiului format de tangenta în punctul $M_0(x_0, y_0)$ la curba

$$z=f(x, y),\quad \frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha},$$

unde f este o funcție derivabilă, cu planul Oxy.

3538. Să se calculeze derivata funcției

$$u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

în punctul $M(1, 2, -2)$ după direcția tangentei în acest punct la curba

$$x=t,\quad y=2t^2,\quad z=-2t^4.$$

Să se scrie ecuaţiile planului tangent şi ale normalei în punctele indicate ale următoarelor suprafeţe:

3539. $z=x^2+y^2$; în punctul $M_0(1, 2, 5)$.

3540. $x^2+y^2+z^2=169$; în punctul $M_0(3, 4, 12)$.

3541. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; în punctul $M_0\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$.

3542. $ax^2+by^2+cz^2=1$; în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

3543. $z=y+\ln\frac{x}{z}$; în punctul $M_0(1, 1, 1)$.

3544. $2^{\frac{x}{z}}+2^{\frac{y}{z}}=8$; în punctul $M_0(2, 2, 1)$.

3545. $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=b\cos\psi\sin\varphi$, $z=c\sin\psi$; în punctul $M_0(\varphi_0, \psi_0)$.

3546. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=r\operatorname{ctg}\alpha$; în punctul $M_0(\varphi_0, r_0)$.

3547. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$; în punctul $M_0(u_0, v_0)$.

3548. Să se găsească poziţia limită a planului tangent la suprafaţa

$$x=u+v,\ y=u^2+v^2,\ z=u^3+v^3,$$

atunci cînd punctul de tangenţă $M(u, v)\,(u\neq v)$ se apropie oricît de mult de punctul $M_0(u_0, u_0)$ de pe linia frontieră $u=v$ a suprafeţei.

3549. Să se găsească punctele de pe suprafaţa $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$, în care planele tangente sînt paralele cu planele de coordonate.

3550. In ce punct al elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

normala formează unghiuri egale cu axele de coordonate?

3551. Să se ducă la suprafaţa $x^2+2y^2+3z^2=21$ plane tangente paralele la planul

$$x+4y+6z=0.$$

3552. Să se demonstreze că planele tangente la suprafaţa $xyz=a^3\,(a>0)$ formează cu planele de coordonate un tetraedru de volum constant.

3553. Să se demonstreze că planele tangente la suprafaţa

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a} \qquad (a>0)$$

intersectează axele de coordonate după nişte segmente a căror sumă este constantă.

3554. Să se demonstreze că planele tangente la conul

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

trec prin vîrful lui.

3555. Să se demonstreze că normalele la suprafaţa de rotaţie

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2})$$

intersectează axa de rotaţie.

3556. Să se găsească proiecţiile elipsoidului

$$x^2+y^2+z^2-xy=1$$

pe planele de coordonate.

3557. Pătratul $\{0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1\}$ este împărţit într-un număr finit de părţi σ de diametru $\leq\delta$. Să se găsească pentru numărul δ valoarea maximă dacă direcţiile normalelor la suprafaţa

$$z=1-x^2-y^2$$

în punctele arbitrare $P(x, y)$ şi $P_1(x_1, y_1)$, aparţinînd aceleiaşi părţi σ, diferă cu mai puţin decît $1°$.

3558. Să presupunem că

$$z=f(x, y), \quad \text{unde} \quad (x, y)\in D, \tag{1}$$

este ecuaţia unei suprafeţe şi că $\varphi(P_1, P)$ este unghiul dintre normalele la suprafaţa (1) în punctele $P(x, y)\in D$ şi $P_1(x_1, y_1)\in D$.

Să se demonstreze că dacă domeniul D este mărginit şi închis şi dacă funcţia $f(x, y)$ are derivate de ordinul al doilea mărginite în domeniul D, atunci are loc *inegalitatea lui Liapunov*

$$\varphi(P_1, P)<C\rho(P_1, P), \tag{2}$$

în care C este o constantă şi $\rho(P_1, P)$ este distanţa dintre punctele P şi P_1.

3559. Sub ce unghi se intersectează cilindrul $x^2+y^2=a^2$ cu suprafaţa $bz=xy$ în punctul lor comun $M_0(x_0, y_0, z_0)$?

3560. Să se arate că suprafeţele coordonate ale coordonatelor sferice $x^2+y^2+z^2=r^2$, $y=x\operatorname{tg}\varphi$, $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\theta$ sînt ortogonale două cîte două.

3561. Să se arate că sferele $x^2+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2+z^2=2by$, $x^2+y^2+z^2=2cz$ formează un sistem triortogonal.

3562. Prin fiecare punct $M(x, y, z)$ trec, pentru $\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$, $\lambda=\lambda_3$, trei suprafeţe de gradul al doilea:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=1 \qquad (a>b>c>0).$$

Să se demonstreze că aceste suprafeţe sînt ortogonale.

3563. Să se calculeze derivata funcţiei $u=x+y+z$ după direcţia normalei exterioare a sferei $x^2+y^2+z^2=1$ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

In ce puncte ale sferei are derivata după direcţia normală a funcţiei u: a) un maxim, b) un minim, c) se anulează?

3564. Să se calculeze derivata funcţiei $u=x^2+y^2+z^2$ după direcţia normalei exterioare la elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ al acestuia.

3565. Fie $\frac{\partial u}{\partial n}$ şi $\frac{\partial v}{\partial n}$ derivatele normale ale funcţiilor u şi v în punctele suprafeţei $F(x, y, z)=0$. Să se demonstreze că

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv)=u\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Să se afle înfăşurătoarea familiilor de curbe plane depinzînd de un parametru:

3566. $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \quad (p=\text{const})$.

3567. $(x-a)^2+y^2=\frac{a^2}{2}$.

3568. $y=kx+\frac{a}{k} \quad (a=\text{const})$. 3569. $y^2=2px+p^2$.

3570. Să se afle curba înfăşurată de segmentul de lungime l, ale cărui extremităţi lunecă pe axele de coordonate.

3571. Să se afle înfăşurătoarea elipselor $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ de arie constantă S.

3572. Să se afle într-un spaţiu vid înfăşurătoarea traiectoriilor unui proiectil care are viteza iniţială v_0, dacă variem în planul vertical unghiul α sub care este aruncat proiectilul.

3573. Să se demonstreze că înfăşurătoarea normalelor unei curbe plane este evoluta acestei curbe.

3574. Să se studieze natura *curbelor discriminante* ale următoarelor familii de curbe (c fiind parametrul variabil);

a) parabola cubică $y=(x-c)^3$;

b) parabola semicubică $y^2=(x-c)^3$;

c) parabola lui Neyl $y^3=(x-c)^2$;

d) strofoida $(y-c)^2=x^2\frac{a-x}{a+x}$.

3575. Să se determine înfăşurătoarea familiei de sfere de rază r ale căror centre sînt situate pe circumferinţa $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=0$ (t fiind un parametru, $R>r$).

3576. Să se afle înfăşurătoarea familiei de sfere

$$(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2=1,$$

unde $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ şi t este un parametru variabil.

3577. Să se determine înfăşurătoarea familiei de elipsoizi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ al căror volum V este constant.

3578. Să se afle înfăşurătoarea familiei de sfere de rază ρ, ale căror centre sînt situate pe suprafaţa conului $x^2+y^2=z^2$.

3579. Un punct luminos se află în originea coordonatelor. Să se determine conul umbrei făcut de sfera

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leq R^2,$$

dacă $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$.

3580. Să se afle înfăşurătoarea familiei de plane

$$z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0),$$

dacă parametrii p şi q sînt legaţi prin relaţia

$$p^2+q^2=1.$$

§ 6. Formula lui Taylor

1°. Formula lui Taylor. Dacă funcţia $f(x, y)$ are într-o anumită vecinătate a punctului (a, b) toate derivatele parţiale continue pînă la ordinul $n+1$ inclusiv, atunci în această vecinătate este valabilă formula

$$f(x, y)=f(a, b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i f(a, b)+R_n(x, y) \qquad (1)$$

unde

$$R_n(x, y)=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(a+\theta_n(x-a),\ b+\theta_n(y-b)) \quad (0<\theta_n<1).$$

2°. Seria lui Taylor. Dacă $f(x, y)$ este o funcție infinit derivabilă și $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, y)=0$, atunci această funcție admite următoarea reprezentare sub forma unei serii de puteri

$$f(x, y)=f(a, b)+\sum_{i+j\geq 1}^{\infty} \frac{1}{i!\,j!} f^{(i+j)}_{x^i y^j}(a, b)(x-a)^i(y-b)^j. \qquad (2)$$

Cazurile particulare ale formulelor (1) și (2) pentru $a=b=0$ se numesc respectiv *formula lui Mac-Laurin* și *seria lui Mac-Laurin*.

Formule analoge sînt valabile și pentru funcțiile de mai multe variabile decît două.

3°. Punctele singulare ale curbelor plane. Să presupunem că într-un anumit punct $M_0(x_0, y_0)$ al curbei $F(x, y)=0$, de două ori derivabilă, sînt satisfăcute condițiile

$$F(x_0, y_0)=0, \quad F'_x(x_0, y_0)=0, \quad F'_y(x_0, y_0)=0$$

și că numerele

$$A=F''_{xx}(x_0, y_0), \quad B=F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C=F''_{yy}(x_0, y_0)$$

nu se anulează toate simultan. In cazul acesta dacă

1) $AC-B^2>0$, M_0 este *un punct izolat*;

2) $AC-B^2<0$, M_0 este *un punct dublu* (un nod);

3) $AC-B^2=0$, M_0 este un *punct de întoarcere* sau un *punct izolat*.

Dacă $A=B=C=0$, este posibil ca să avem tipuri mai complicate de puncte singulare. Curbele care nu fac parte din clasa de regularitate $C^{(2)}$ pot avea singularități de o natură mai complicată: *punct de întrerupere, puncte unghiulare* etc.

3581. Să se dezvolte funcția $f(x, y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ după formula lui Taylor în vecinătatea punctului $A(1, -2)$.

3582. Să se dezvolte funcția $f(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ după formula lui Taylor în vecinătatea punctului $A(1, 1, 1)$.

3583. Să se determine creșterea pe care o primește funcția $f(x, y)=x^2y+xy^2-2xy$, dacă trecem de la valorile $x=1$, $y=-1$ la valorile $x_1=1+h$, $y_1=-1+k$.

3584. Să se dezvolte $f(x+h, y+k, z+l)$ după puterile întregi pozitive ale mărimilor h, k și l, dacă

$$f(x, y, z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz.$$

3585. Să se scrie termenii pînă la ordinul al doilea inclusiv din dezvoltarea funcției

$$f(x, y)=x^y$$

în vecinătatea punctului $A(1, 1)$.

3586. Să se dezvolte după formula lui Mac-Laurin, pînă la termenii de ordinul al patrulea inclusiv, funcția

$$f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

3587. Să se deducă, cu aproximația termenilor de ordinul al doilea, formule apropiate pentru expresiile:

a) $\dfrac{\cos x}{\cos y}$; b) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$,

dacă $|x|$ și $|y|$ sînt mici în comparație cu 1.

3588. Să se simplifice expresia

$$\cos(x+y+z)-\cos x\cos y\cos z,$$

considerînd că x, y, z sînt mici în valoare absolută.

3589. Să se dezvolte funcția

$$F(x, y)=\frac{1}{4}[f(x+h, y)+f(x, y+h)+f(x-h, y)+$$
$$+f(x, y-h)]-f(x, y)$$

după puterile lui h, mergînd pînă la termenii în h^4.

3590. Fie $f(P)=f(x, y)$ și fie $P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$ vîrfurile triunghiului echilateral înscris în cercul cu centrul în punctul $P(x, y)$, de rază ρ, iar $x_1=x+\rho$, $y_1=y$. Să se dezvolte funcția

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

după puterile întregi și pozitive ale lui ρ, mergînd pînă la termenii în ρ^2.

3591. Să se dezvolte după puterile lui h și k, funcția

$$\Delta_{xy} f(x, y)=f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y).$$

3592. Să se dezvolte după puterile lui ρ, funcția

$$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Să se dezvolte în serie Mac-Laurin următoarele funcţii:

3593. $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$.

3594. $f(x, y) = \ln(1+x+y)$.

3595. $f(x, y) = e^x \sin y$.

3596. $f(x, y) = e^x \cos y$.

3597. $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

3598. $f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$.

3599. $f(x, y) = \sin(x^2+y^2)$.

3600. $f(x, y) = \ln(1+x)\ln(1+y)$.

3601. Să se scrie primii trei termeni din dezvoltarea în serie Mac-Laurin a funcţiei

$$f(x, y) = \int_0^1 (1+x)^{t^2 y}\, dt.$$

3602. Să se dezvolte funcţia e^{x+y} într-o serie de puteri după puterile întregi şi pozitive ale binoamelor $x-1$ şi $y+1$.

3603. Să se scrie dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei $f(x, y) = \frac{x}{y}$ în vecinătatea punctului $M(1, 1)$.

3604. Să presupunem că z este acea funcţie implicită de x şi y, definită de ecuaţia $z^3 - 2xz + y = 0$, care pentru $x = 1$ şi $y = 1$ ia valoarea $z = 1$.

Să se scrie cîţiva termeni ai dezvoltării funcţiei z după puterile crescătoare ale binoamelor $x-1$ şi $y-1$.

Să se studieze tipurile de puncte singulare ale următoarelor curbe şi să se schiţeze aceste curbe:

3605. $y^2 = ax^2 + x^3$.

3606. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

3607. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

3608. $x^2 + y^4 = y^6$.

3609. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

3610. $(y-x^2)^2 = x^5$.

3611. $(a+x)y^2 = (a-x)x^2$.

3612. Să se studieze forma curbei $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ în funcţie de valorile parametrilor a, b, c $(a \leq b \leq c)$.

Să se studieze punctele singulare ale curbelor transcendente:

3613. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$.

3614. $y^2 = 1 - e^{-x^3}$.

3615. $y = x \ln x$.

3616. $y = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

3617. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$.

3618. $y^2 = \sin\frac{\pi}{x}$.

3619. $y^2 = \sin x^2$.

3620. $y^2 = \sin^3 x$.

§ 7. Extremumul unei funcţii de mai multe variabile

1°. Definiţia extremumului. Dacă funcţia $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$ este definită în vecinătatea punctului P_0 şi avem sau $f(P_0) > f(P)$, sau $f(P_0) < f(P)$ pentru $0 < \rho(P_0, P) < \delta$, atunci spunem că funcţia $f(P)$ are un *extremum* (respectiv un *maxim* sau un *minim*) în punctul P_0.

2°. Condiţia necesară pentru extremum. Funcţia derivabilă $f(P)$ poate să-şi atingă extremumul numai într-un punct *staţionar* P_0, adică într-un punct în care $df(P_0) = 0$. Prin urmare, punctele în care funcţia $f(P)$ are valori extreme trebuie să verifice sistemul de ecuaţii $f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

3°. Condiţia suficientă pentru extremum. Funcţia $f(P)$ va avea în punctul P_0:

a) *un maxim* dacă $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) < 0$, şi b) *un minim* dacă $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) > 0$.

Studiul semnului diferenţialei de ordinul al doilea $d^2f(P_0)$ poate fi făcut prin reducerea formei pătratice respective la forma canonică.

In particular, în punctul staţionar (x_0, y_0) al unei funcţii $f(x, y)$ de variabilele independente x şi y $(df(x_0, y_0) = 0)$, în ipoteza că $D = AC - B^2 \neq 0$, unde $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, avem:

1) *un minim*, dacă $D > 0$, $A > 0$ $(C > 0)$;

2) *un maxim*, dacă $D > 0$, $A < 0$ $(C < 0)$;

3) *n-avem extremum*, dacă $D < 0$.

4°. Extremum cu legături. Problema determinării extremumului funcţiei $f(P_0) = f(x_1, \ldots, x_n)$ alături de care există o serie de relaţii de legătură $\varphi_i(P) = 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ m < n)$ se reduce la aflarea extremumului obişnuit pentru *funcţia lui Lagrange*

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(P),$$

unde λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ sînt factori constanţi. Problema existenţei şi naturii extremului cu legături se rezolvă în cazul cel mai simplu studiind semnul diferenţialei de ordinul al doilea $d^2L(P_0)$ în punctul staţionar P_0 al funcţiei $L(P)$, în ipoteza că variabilele $dx_1, \ldots, dx_n$ sînt legate prin relaţia

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

5°. Extremum absolut. Funcţia $f(P)$, derivabilă într-un domeniu mărginit şi închis, îşi atinge valoarea maximă şi valoarea minimă în acest domeniu sau într-un punct staţionar, sau într-un punct frontieră al domeniului.

Să se studieze valorile extreme ale următoarelor funcţii de mai multe variabile:

3621. $z=x^2+(y-1)^2$.

3622. $z=x^2-(y-1)^2$.

3623. $z=(x-y+1)^2$.

3624. $z=x^2-xy+y^2-2x+y$.

3625. $z=x^2y^3(6-x-y)$.

3626. $z=x^3+y^3-3xy$.

3627. $z=x^4+y^4-x^2-xy-y^2$.

3628. $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}$ $\quad (x>0,\ y>0)$.

3629. $z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ $\quad (a>0,\ b>0)$.

3630. $z=\frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ $\quad (a^2+b^2+c^2\neq 0)$.

3631. $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$.

3632. $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$.

3633. $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

3634. $z=(5x+7y-25)\,e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

3635. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

3636. $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$ $\quad \left(0\leq x\leq\frac{\pi}{2};\quad 0\leq y\leq\frac{\pi}{2}\right)$.

3637. $z=\sin x\sin y\sin(x+y)$ $\quad (0\leq x\leq\pi;\quad 0\leq y\leq\pi)$.

3638. $z=x-2y+\ln\sqrt{x^2+y^2}+3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

3639. $z=xy\ln(x^2+y^2)$.

3640. $z=x+y+4\sin x\sin y$.

3641. $z=(x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$.

3642. $u=x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$.

3643. $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

3644. $u=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$ $\quad (x>0,\ y>0,\ z>0)$.

3645. $u=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$ $\quad (a>0)$.

3646. $u=\frac{a^2}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{b}$

$$(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0,\ b>0).$$

3647. $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)$

$$(0\leq x\leq\pi;\quad 0\leq y\leq\pi;\quad 0\leq z\leq\pi).$$

3648. $u=x_1x_2^2\ldots x_n^n\ (1-x_1-2x_2-\ldots-nx_n)$

$$(x_1>0,\ x_2>0,\ldots,x_n>0).$$

3649. $u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n-1}}+\frac{2}{x_n}$

$$(x_i>0,\ i=1,\ 2,\ldots,n).$$

3650. Problema lui Huygens. Să se intercaleze între două numere pozitive a şi b, n numere $x_1, x_2,\ldots,x_n$, în aşa fel încît fracţia

$$u=\frac{x_1x_2\ldots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\ldots(x_n+b)}$$

să fie maximă.

Să se determine valorile extreme ale funcţiei z de variabilele x şi y, dată sub forma implicită:

3651. $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

3653. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

Să se determine punctele de extremum cu legături pentru următoarele funcţii:

3654. $z=xy$, dacă $x+y=1$.

3655. $z=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, dacă $x^2+y^2=1$.

3656. $z=x^2+y^2$, dacă $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

3657. $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, dacă $x^2+y^2=1$.

3658. $z=\cos^2x+\cos^2y$, dacă $x-y=\frac{\pi}{4}$.

3659. $u=x-2y+2z$, dacă $x^2+y^2+z^2=1$.

3660. $u=x^my^nz^p$, dacă

$$x+y+z=a\qquad (m>0,\ n>0,\ p>0,\ a>0).$$

3661. $u=x^2+y^2+z^2$, dacă

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\qquad (a>b>c>0).$$

3662. $u=xy^2z^3$, dacă $x+2y+3z=a$

$$(x>0,\ y>0,\ z>0,\ a>0).$$

3663. $u=xyz$, dacă $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$.

3664. $u=\sin x \sin y \sin z$, dacă $x+y+z=\frac{\pi}{2}$

$$(x>0,\ y>0,\ z>0).$$

3665. $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, dacă $x^2+y^2+z^2=1$,

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0,$$

$$(a>b>c>0,\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1).$$

3666. $u=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$, dacă

$$Ax+By+Cz=0,\ x^2+y^2+z^2=R^2,$$

$$\frac{\xi}{\cos\alpha}=\frac{\eta}{\cos\beta}=\frac{\zeta}{\cos\gamma},\ \text{unde } \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3667. $u=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$, dacă

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}=1 \quad (a_i>0;\ i=1,\ 2,\ldots,n).$$

3668. $u=x_1^p+x_2^p+\ldots+x_n^p$ $(p>1)$, dacă

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a \quad (a>0).$$

3669. $u=\frac{\alpha_1}{x_1}+\frac{\alpha_2}{x_2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{x_n}$, dacă

$$\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n=1 \quad (\alpha_i>0,\ \beta_i>0;\quad i=1,\ 2,\ldots,n).$$

3670. $u=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, dacă $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$

$$(a>0,\ \alpha_i>1,\ i=1,\ 2,\ldots,n).$$

3671. Să se găsească extremumul formei pătratice

$$u=\sum_{i,j}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji}),$$

cu condiția ca

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1.$$

3672. Să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,$$

dacă $n\geq 1$ și $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Indicație. Se va căuta minimul funcției $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$, cu condiția ca $x+y=s$.

3673. Să se demonstreze *inegalitatea lui Hölder*

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

$$\left(a_i\geq 0,\ x_i\geq 0,\ i=1,\ 2,\ldots,n;\ k>1,\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right).$$

Indicație. Se va căuta minimul funcției

$$u=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}},$$

cu condiția ca

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i=A.$$

3674. Să se demonstreze *inegalitatea lui Hadamard* pentru determinantul $A=|a_{ij}|$ de ordinul n:

$$A^2\leq\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right).$$

Indicație. Se va considera extremumul determinantului $A=|a_{ij}|$, alături de care mai avem relațiile de legătură

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2=S_i \qquad (i=1,\ 2,\ldots,n).$$

Să se determine în domeniile indicate valoarea maximă (*sup*) și valoarea minimă (*inf*) ale următoarelor funcții:

3675. $z=x-2y-3$, dacă

$$0\leq x\leq 1,\quad 0\leq y\leq 1,\quad 0\leq x+y\leq 1.$$

3676. $z=x^2+y^2-12x+16y$, dacă $x^2+y^2\leq 25$.
3677. $z=x^2-xy+y^2$, dacă $|x|+|y|\leq 1$.
3678. $u=x^2+2y^2+3z^2$, dacă $x^2+y^2+z^2\leq 100$.
3679. $u=x+y+z$, dacă $x^2+y^2\leq z\leq 1$.
3680. Să se afle marginea inferioară (*inf*) şi marginea superioară (*sup*) a funcţiei

$$u=(x+y+z)\,e^{-(x+2y+3z)}$$

în domeniul $x>0$, $y>0$, $z>0$.

3681. Să se arate că funcţia $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ are o infinitate de maxime şi nu are nici un singur minim.

3682. Este oare suficient, pentru ca funcţia $f(x, y)$ să aibă în punctul $M_0(x_0, y_0)$ un minim, ca această funcţie să aibă un minim de-a lungul fiecărei drepte care trece prin punctul M_0?

Să se considere exemplul $f(x, y)=(x-y^2)(2x-y^2)$.

3683. Să se descompună un număr pozitiv a dat în m factori pozitivi, astfel încît suma inverselor acestor factori să fie minimă.

3684. Să se descompună numărul pozitiv a dat în n termeni, în aşa fel încît suma pătratelor lor să fie minimă.

3685. Să se descompună numărul pozitiv a dat în n factori pozitivi, astfel încît suma puterilor pozitive date ale acestora să fie minimă.

3686. Să presupunem date în plan n puncte materiale $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2), \ldots, P_n(x_n, y_n)$, avînd respectiv masele $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Pentru ce poziţie a punctului $P(x, y)$ este minim momentul de inerţie al sistemului în raport cu acest punct?

3687. Pentru ce dimensiuni are o suprafaţă minimă o cadă dreptunghiulară deschisă de capacitate dată V?

3688. Pentru ce dimensiuni are o capacitate maximă o cadă cilindrică deschisă de secţiune transversală semicirculară, a cărei suprafaţă este S?

3689. Să se afle pe sfera $x^2+y^2+z^2=1$ punctul care se bucură de proprietatea că suma pătratelor distanţelor sale la n puncte date $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ este minimă.

3690. Un corp este format dintr-un cilindru circular drep completat printr-un con circular drept. Presupunînd că aria totală a corpului este dată şi egală cu Q, să se determine dimensiunile lui în aşa fel, încît volumul lui să fie maxim.

3691. Un corp de volum V are forma unui paralelipiped drept ale cărui baze sînt completate cu două piramide regulate avînd baza un pătrat. Pentru ce unghi de înclinare al suprafeţelor laterale ale piramidelor faţă de bazele lor, este minimă aria totală a corpului?

3692. Să se afle dreptunghiul de perimetru dat $2p$, care prin rotirea în jurul uneia din laturile sale formează un corp de volum maxim.

3693. Să se găsească triunghiul de perimetru dat $2p$, care prin rotirea în jurul uneia din laturile sale formează un corp de volum maxim.

3694. Să se înscrie în emisfera de rază R un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

3695. Să se înscrie într-un con circular drept dat un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

3696. Să se înscrie în elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

3697. Să se înscrie în conul circular drept, a cărui generatoare l este înclinată faţă de planul bazei cu unghiul α, un paralelipiped dreptunghic de arie totală maximă.

3698. Să se înscrie în segmentul paraboloidului eliptic $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, $z=c$ un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

3699. Să se găsească distanţa cea mai scurtă a punctului $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul $Ax+By+Cz+D=0$.

3700. Să se determine distanţa cea mai scurtă între dreptele din spaţiu

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

şi

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

3701. Să se afle distanţa cea mai scurtă dintre parabola $y=x^2$ şi dreapta $x-y-2=0$.

3702. Să se afle semiaxele curbei cu centru de gradul al doilea

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1.$$

3703. Să se afle semiaxele suprafeţei cu centru de gradul al doilea

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxz=1.$$

3704. Să se determine aria elipsei de intersecţie a cilindrului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

cu planul

$$Ax+By+Cz=0.$$

3705. Să se determine aria secţiunii elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

cu planul

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0,$$

unde

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3706. Conform principiului lui Fermat, lumina care izvorăşte din punctul A şi ajunge în punctul B se propagă după o curbă, pentru a cărei parcurgere este necesar timpul minim.

Presupunînd că punctele A şi B sînt situate în medii optice diferite separate printr-un plan, că viteza de propagare a luminii în primul mediu este v_1, iar în al doilea mediu v_2, să se deducă legea refracţiei luminii.

3707. Pentru ce unghi de incidenţă este minimă deviaţia razei luminoase (adică unghiul dintre raza incidentă şi raza emergentă) care trece prin prizma avînd unghiul de refracţie α şi indicele de refracţie n? Să se determine această deviaţie minimă.

3708. Variabilele x şi y verifică ecuaţia liniară

$$y=ax+b,$$

ai cărei coeficienţi trebuie determinaţi. După o serie de măsurări de aceeaşi precizie s-au obţinut pentru mărimile lui x şi y valorile x_i, y_i $(i=1, 2,\ldots, n)$.

Folosind metoda celor mai mici pătrate, să se determine valorile cele mai probabile ale coeficienţilor a şi b.

Indicaţie. Conform metodei celor mai mici pătrate, valorile cele mai probabile ale coeficienţilor a şi b sînt acelea pentru care suma pătratelor erorilor

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

este minimă.

3709. Intr-un plan este dat un sistem de n puncte $M_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2,\ldots, n)$.

Pentru ce poziţie a dreptei $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ suma pătratelor abaterilor punctelor date de la această dreaptă este minimă?

3710. Să se aproximeze funcţia x^2 în intervalul (1, 3) cu funcţia liniară $ax+b$ în aşa fel, încît abaterea absolută

$$\Delta=\sup|x^2-(ax+b)| \qquad (1\leq x\leq 3)$$

să fie minimă.

CAPITOLUL VII

INTEGRALE DEPINZÎND DE UN PARAMETRU

§ 1. Integrale proprii depinzînd de un parametru

1°. Continuitatea integralei. Dacă funcția $f(x, y)$ este definită și continuă în domeniul mărginit $R[a \leq x \leq A;\ b \leq y \leq B]$, atunci

$$F(y) = \int_a^A f(x, y)\, dx$$

reprezintă o funcție continuă pe segmentul $b \leq y \leq B$.

2°. Derivarea sub semnul integrală. Dacă funcția $f(x, y)$ mai are și derivată parțială $f'_y(x, y)$ continuă în domeniul R, atunci pentru $b < y < B$ este valabilă *formula lui Leibniz*

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_a^A f'_y(x, y)\, dx.$$

In cazul mai general, cînd limitele de integrare sînt funcții derivabile $\varphi(y)$ și $\psi(y)$ de parametrul y, iar $a \leq \varphi(y) \leq A$, $a \leq \psi(y) \leq A$ pentru $b < y < B$, atunci avem

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx = f(\psi(y), y)\, \psi'(y) - f(\varphi(y), y)\, \varphi'(y) +$$

$$+ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\, dx \qquad (b < y < B).$$

3°. Integrarea sub semnul integrală. Dacă condițiile 1° sînt satisfăcute, avem:

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y)\, dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y)\, dy.$$

3711. Să se arate că integrala

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y)\, dx$$

de funcția discontinuă $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ este o funcție continuă. Să se construiască graficul funcției $u = F(y)$.

3712. Să se studieze continuitatea funcției

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2}\, dx,$$

unde funcția $f(x)$ este continuă și pozitivă pe segmentul $[0, 1]$.

3713. Să se calculeze

a) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_\alpha^{1+\alpha} \frac{dx}{1 + x^2 + \alpha^2}$; b) $= \lim\limits_{\alpha \to 0} \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + \alpha^2}\, dx$;

c) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x\, dx$; d) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$.

3714. Să presupunem că funcția $f(x)$ este continuă pe segmentul $[a, A]$. Să se demonstreze că

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)]\, dt = f(x) - f(a) \quad (a < x < A).$$

3715. Putem trece oare la limită sub semnul integrală, în expresia

$$\lim_{y \to 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}\, dx\,?$$

3716. Putem calcula oare după regula lui Leibniz derivata funcției

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$$

pentru $y = 0$?

3717. Să se calculeze $F'(x)$, dacă

$$F(x)=\int_{x}^{x^2} e^{-xy^2}\,dy.$$

3718. Să se calculeze $F'(\alpha)$, dacă:

a) $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx;$ c) $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\,dx;$

b) $F(\alpha)=\int\limits_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx;$

d) $F(\alpha)=\int\limits_{a\alpha}^{b\alpha} f(x+\alpha,\ x-\alpha)\,dx;$

e) $F(\alpha)=\int\limits_{0}^{\alpha^2} dx\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy.$

3719. Să se calculeze $F''(x)$, dacă

$$F(x)=\int_{0}^{x}(x+y)\,f(y)\,dy,$$

unde $f(x)$ este o funcţie derivabilă.

3720. Să se calculeze $F''(x)$, dacă

$$F(x)=\int_{a}^{b} f(y)\,|x-y|\,dy,$$

unde $a<b$ şi $f(y)$ este o funcţie derivabilă.

3721. Să se calculeze $F''(x)$, dacă

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_{0}^{h}d\xi\int_{0}^{h} f(x+\xi+\eta)\,d\eta \qquad (h>0),$$

unde $f(x)$ este o funcţie continuă.

3722. Să se calculeze $F^{(n)}(x)$, dacă

$$F(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,(x-t)^{n-1}\,dt.$$

3723. Să se aproximeze funcţia $f(x)=x^2$ în intervalul $1\leq x\leq 3$ prin funcţia liniară $a+bx$ în aşa fel, încît

$$\int_{1}^{3}(a+bx-x^2)^2\,dx=\min.$$

3724. Să se obţină formula aproximativă

$$\sqrt{1+x^2}\approx a+bx \qquad (0\leq x\leq 1)$$

din condiţia ca abaterea medie pătratică a funcţiilor $a+bx$ şi $\sqrt{1+x^2}$ în intervalul dat $[0,\ 1]$ să fie minimă.

3725. Să se calculeze derivatele *integralelor eliptice complete*

$$E(k)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

şi

$$F(k)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad (0<k<1)$$

şi să se exprime aceste derivate în funcţie de $E(k)$ şi $F(k)$.

Să se arate că $E(k)$ verifică ecuaţia diferenţială

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

3726. Să se demonstreze că *funcţia lui Bessel de indice întreg n*

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi$$

verifică *ecuaţia lui Bessel*

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)\,J_n(x)=0.$$

3727. Fie

$$I(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{\varphi(x)\,dx}{\sqrt{\alpha-x}},$$

unde funcţia $\varphi(x)$ este continuă pe segmentul $0 \leqq x \leqq a$ împreună cu prima sa derivată $\varphi'(x)$.

Să se demonstreze că pentru $0<\alpha<a$ avem:

$$I'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\,dx.$$

Indicaţie. Se va pune $x=\alpha t$.

3728. Să se arate că funcţia

$$u(x)=\int_0^1 K(x,\ y)\,v(y)\,dy,$$

unde

$$K(x,\ y)=\begin{cases} x(1-y), & \text{dacă } x \leqq y; \\ y(1-x), & \text{dacă } x>y, \end{cases}$$

iar $v(y)$ este o funcţie continuă, verifică ecuaţia

$$u''(x)=-v(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1).$$

3729. Să se calculeze $F''_{xy}(x,\ y)$, dacă

$$F(x,\ y)=\int_{\frac{x}{y}}^{xy} (x-yz)\,f(z)\,dz,$$

unde $f(z)$ este o funcţie derivabilă.

3730. Fie $f(x)$ o funcţie de două ori derivabilă şi $F(x)$ o funcţie derivabilă.

Să se demonstreze că funcţia

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)\,dz$$

verifică *ecuaţia coardei vibrante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şi condiţiile iniţiale: $u(x,\ 0)=f(x)$, $u'_t(x,\ 0)=F(x)$.

3731. Să se arate că dacă funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $[0,\ l]$ şi $(x-\xi)^2+y^2+z^2 \neq 0$ pentru $0 \leqq \xi \leqq l$, funcţia

$$u(x,\ y,\ z)=\int_0^l \frac{f(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2+z^2}}$$

verifică *ecuaţia lui Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Să se calculeze, aplicînd regula de derivare în raport cu un parametru, următoarele integrale:

3732. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,dx.$

3733. $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2a\cos x+a^2)\,dx.$ **3734.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx.$

3735. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\cdot\frac{dx}{\cos x}$ $(|a|<1)$.

3736. Folosind formula

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int_0^1 \frac{dy}{1+x^2y^2},$$

să se calculeze integrala

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3737. Folosind integrarea sub semnul integrală să se calculeze integrala

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx \quad (a>0,\ b>0).$$

3738. Să se calculeze integralele:

a) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx$ $(a>0,\ b>0)$.

3739. Fie $F(k)$ şi $E(k)$ integralele eliptice complete (v. problema 3725). Să se demonstreze formulele

$$\text{a)}\quad \int_0^k F(k)\,k\,dk = E(k) - k_1^2 F(k)\,;$$

$$\text{b)}\quad \int_0^k E(k)\,k\,dk = \frac{1}{3}\left[(1+k^2)\,E(k) - k_1^2 F(k)\right],$$

unde $k_1^2 = 1 - k^2$.

3740. Să se demonstreze formula

$$\int_0^x x J_0(x)\,dx = x J_1(x),$$

unde $J_0(x)$ şi $J_1(x)$ sînt funcţiile lui Bessel de indice 0 şi 1 (v. problema 3726).

§ 2. Integrale improprii depinzînd de un parametru. Convergenţa uniformă a integralelor

1°. Definiţia convergenţei uniforme. Vom spune că integrala improprie

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx, \tag{1}$$

unde funcţia $f(x, y)$ este continuă în domeniul $a \leq x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$, este *uniform convergentă* în intervalul (y_1, y_2) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $B = B(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $b \geqq B$ să avem

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2).$$

Convergenţa uniformă a integralei (1) este echivalentă cu convergenţa uniformă a tuturor seriilor de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y)\,dx, \tag{2}$$

unde $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dacă integrala (1) este uniform convergentă în intervalul (y_1, y_2), ea reprezintă *o funcţie continuă* de parametru y în acest interval.

2°. Criteriul lui Cauchy. Pentru ca integrala (1) să fie uniform convergentă în intervalul (y_1, y_2), este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un număr $B = B(\varepsilon)$, astfel încît

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x, y)\,dx \right| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad y_1 < y < y_2,$$

de îndată ce $b' > B$ şi $b'' > B$.

3°. Criteriul lui Weierstrass. Pentru ca integrala (1) să fie uniform convergentă este suficient ca să existe o funcţie majorantă $F(x)$ care nu depinde de parametrul y, astfel încît

1) $|f(x, y)| \leq F(x)$ pentru $a \leq x < +\infty$

şi

2) $\displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)\,dx < +\infty$.

4°. Teoreme analoge sînt valabile şi pentru integralele improprii de funcţii discontinue.

Să se determine domeniile de convergenţă ale integralelor:

3741. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,dx.$

3742. $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^p + x^q}\,dx.$

3743. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p}\,dx.$

3744. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}.$

3745. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}}\,dx.$

3746. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x}\,dx \quad (p > 0).$

Să se studieze convergenţa următoarelor integrale, comparîndu-le cu nişte serii convenabil alese:

3747. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a}\,dx.$

3748. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^n \sin^2 x} \quad (n > 0).$

3749. $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}$

3750. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n}\,dx.$

3751. Să se formuleze în sens pozitiv faptul că integrala

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

nu este uniform convergentă în intervalul dat (y_1, y_2).

3752. Să se demonstreze că dacă 1) integrala

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

este convergentă şi 2) funcţia $\varphi(x, y)$ este mărginită şi monotonă în raport cu x, atunci integrala

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x, y)\,dx$$

este uniform convergentă (în domeniul respectiv).

3753. Să se demonstreze că integrala uniform convergentă

$$I=\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}dx \quad (0<y<1)$$

nu poate fi majorată printr-o integrală convergentă care să nu depindă de un parametru.

3754. Să se arate că integrala

$$I=\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}dx$$

(1) este uniform convergentă în orice interval $0<a\leqq\alpha\leqq b$ şi 2) nu este uniform convergentă în intervalul $0\leqq\alpha\leqq b$.

3755. Să se demonstreze că integrala lui Dirichlet

$$I=\int_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

(1) este uniform convergentă pe orice segment $[a, b]$ care nu conţine pe $\alpha=0$ şi 2) nu este uniform convergentă pe orice segment $[a, b]$ care conţine pe $\alpha=0$.

Să se studieze în intervalele indicate convergenţa uniformă a următoarelor integrale:

3756. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx \quad (0<\alpha_0\leqq\alpha<+\infty)$,

3757. $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx \quad (a\leqq\alpha\leqq b)$.

3758. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx \quad (-\infty<\alpha<+\infty)$.

3759. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} \quad (0\leqq\alpha<+\infty)$.

3760. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx \quad (0\leqq\alpha<+\infty)$.

3761. $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx \quad (0\leqq\alpha<+\infty)$, unde $p>0$ este fixat.

3762. $\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx \quad (0\leqq\alpha<+\infty)$.

3763. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}dx$; a) $a<\alpha<b$; b) $-\infty<\alpha<+\infty$.

3764. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin x\,dy \quad (-\infty<x<+\infty)$.

3765. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}dx \quad (p\geqq 0)$.

3766. $\int_0^1 x^{p-1}\ln^q x\,dx$; a) $p\geqq p_0>0$; b) $p>0$ (q este fixat).

3767. $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (0\leqq n<+\infty)$.

3768. $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^n} \quad (0<n<2)$.

3769. $\int_0^2 \frac{x^{\alpha}dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad (|\alpha|<1)$.

3770. $\int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx \quad (0\leqq\alpha\leqq 1)$.

3771. Vom spune că integrala este *uniform convergentă pentru o valoare dată a parametrului* dacă ea este uniform convergentă într-o anumită vecinătate a acestei valori.

Să se demonstreze că integrala

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha dx}{x^2+\alpha^2}$$

este uniform convergentă pentru orice valoare $\alpha\neq 0$ şi nu este uniform convergentă pentru $\alpha=0$.

3772. Este permisă oare trecerea la limită sub semnul integrală, în expresia

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}\,dx?$$

3773. Fie $f(x)$ o funcţie integrabilă în intervalul $(0, +\infty)$. Să se demonstreze formula

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)\,dx=\int_0^{+\infty}f(x)\,dx.$$

3774. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx\,dx=0,$$

dacă $f(x)$ este absolut integrabilă în intervalul $(0, +\infty)$.

3775. Să se demonstreze că dacă 1) $f(x, y)\rightrightarrows f(x, y_0)$ în orice interval finit (a, b); 2) $|f(x, y)|\leqq F(x)$, unde $\int_a^{+\infty}F(x)\,dx<+\infty$, atunci

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x, y)\,dx=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x, y)\,dx.$$

3776. Să se calculeze integrala

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\right]dx,$$

folosind trecerea la limită sub semnul integrală.

3777. Să se demonstreze că integrala

$$F(a)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-a)^2}dx$$

este o funcţie continuă de parametrul a.

3778. Să se determine punctele de discontinuitate ale funcţiei

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-a^2)x}{x}\,dx.$$

Să se construiască graficul funcţiei $y=F(a)$.

Să se studieze continuitatea în intervalele indicate a următoarelor funcţii:

3779. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{2+x^\alpha}$ pentru $\alpha>2$.

3780. $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ pentru $\alpha>0$.

3781. $F(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha(\pi-x)^\alpha}\,dx$ pentru $0<\alpha<2$.

3782. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{|\sin x|^\alpha}\,dx$ pentru $0<\alpha<1$.

3783. $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^2}\,dx$ pentru $-\infty<\alpha<+\infty$.

§ 3. Schimbarea de variabile la integralele improprii. Derivarea şi integrarea sub semnul integrală a integralelor improprii

1°. Derivarea în raport cu un parametru. Dacă 1) funcţia $f(x, y)$ este continuă şi derivabilă în raport cu parametrul y în domeniul $a\leq x<+\infty$, $y_1<y<y_2$; 2) $\int_a^{+\infty}f(x, y)\,dx$ este convergentă; 3) $\int_a^{+\infty}f'_y(x, y)\,dx$ este uniform convergentă în intervalul (y_1, y_2), atunci

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x, y)\,dx=\int_a^{+\infty}f'_y(x, y)\,dx$$

pentru $y_1<y<y_2$ *(regula lui Leibniz)*.

2°. Formula integrării în raport cu un parametru. Dacă 1) funcţia $f(x, y)$ este continuă pentru $x\geq a$ şi $y_1\leq y\leq y_2$; 2) $\int_a^{+\infty}f(x, y)\,dx$

este uniform convergentă în intervalul finit (y_1, y_2), atunci

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{a}^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_{a}^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy. \qquad (1)$$

Dacă $f(x, y) \geqq 0$, formula (1) este valabilă și pentru intervalul infinit (y_1, y_2), în ipoteza că unul din membrii egalității (1) are sens.

3784. Folosind formula

$$\int_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0),$$

să se calculeze integrala

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x\, dx,$$

unde m este un număr natural.

3785. Folosind formula

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0),$$

să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}},$$

unde n este un număr natural.

3786. Să se demonstreze că integrala lui Dirichlet

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$$

are o derivată pentru $\alpha \neq 0$, totuși ea nu poate fi calculată cu ajutorul regulei lui Leibniz.

Indicație. Se va pune $\alpha x = y$.

3787. Să se arate că funcția

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\, dx$$

este continuă și derivabilă în domeniul

$$-\infty < \alpha < +\infty.$$

3788. Plecînd de la egalitatea

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy}\, dy,$$

să se calculeze integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx \quad (a > 0,\ b > 0).$$

3789. Să se demonstreze *formula lui Frullani*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = f(+0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0,\ b > 0),$$

unde $f(x)$ este o funcție continuă, iar integrala $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ are sens pentru orice $A > 0$.

Aplicînd formula lui Frullani, să se calculeze integralele:

3790. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\, dx \quad (a > 0,\ b > 0).$

3791. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x}\, dx \quad (a > 0,\ b > 0).$

3792. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x}\, dx \quad (a > 0,\ b > 0).$

Cu ajutorul derivării în raport cu un parametru, să se calculeze următoarele integrale:

3793. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\, dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

3794. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

3795. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx\, dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

3796. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x} \cos mx\, dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

Să se calculeze integralele:

3797. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (|\alpha| \leqq 1).$

3798. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad (|\alpha| \leqq 1).$

3799. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, dx.$ **3800.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}\, dx.$

3801. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2}\, dx.$

3802. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2x^2)\ln(1+\beta^2x^2)}{x^4}\, dx.$

3803. Să se calculeze *integrala lui Euler-Poisson*

$$I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

plecînd de la formula

$$I^2=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{+\infty} xe^{-x^2y^2}dy.$$

Să se calculeze, folosind integrala lui Euler-Poisson, valorile următoarelor integrale:

3804. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)}\, dx \quad (a>0,\ ac-b^2>0).$

3805. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1x^2+2b_1x+c_1)\, e^{-(ax^2+2bx+c)}\, dx \quad (a>0,\ ac-b^2>0).$

3806. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx\, dx \quad (a>0).$

3807. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\, dx \quad (a>0).$

3808. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}\, dx \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$

3809. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx\, dx \quad (a>0).$

3810. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin bx\, dx \quad (a>0).$

3811. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx$ (n fiind un număr natural).

3812. Plecînd de la integrala

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx \qquad (\alpha \geqq 0),$$

să se calculeze *integrala lui Dirichlet*

$$D(\beta)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x}\, dx.$$

Să se calculeze, folosind integralele lui Dirichlet şi Frullani, valorile următoarelor integrale:

3813. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-\cos \beta x}{x^2}\, dx.$ $(\alpha>0)$

3814. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x}\, dx.$

3815. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x}\, dx.$

3816. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx.$

3817. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^2 dx.$

3818. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x}\right)^3 dx.$

3819. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\, dx.$

3820. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x-\sin^4 \beta x}{x}\, dx.$

3821. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x}\, dx.$

3822. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x\sin\beta x}{x^2}\,dx \quad (k\geqq 0,\ \alpha>0,\ \beta>0).$

3823. Să se găsească *factorul discontinuu al lui Dirichlet*

$$D(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\sin\lambda\cos\lambda x\,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

pentru valori distincte ale lui x. Să se construiască graficul funcției $y=D(x)$.

3824. Să se calculeze integralele:

a) v. p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x+b}\,dx$; b) v. p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x+b}\,dx.$

3825. Folosind formula

$$\frac{1}{1+x^2}=\int_{0}^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}\,dy,$$

să se calculeze *integrala lui Laplace*

$$L=\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\,dx.$$

3826. Să se calculeze integrala

$$L_1=\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\,dx.$$

Să se calculeze integralele:

3827. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,dx.$ **3828.** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\,dx.$

3829. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}\,dx \quad (a>0,\ ac-b^2>0).$

3830. Folosind formula

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-xy^2}\,dy \quad (x>0),$$

să se calculeze *integrala lui Fresnel*

$$\int_{0}^{+\infty}\sin(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$$

și

$$\int_{0}^{+\infty}\cos(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Să se afle valorile următoarelor integrale:

3831. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax^2+2bx+c)\,dx \quad (a\neq 0).$

3832. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\cdot\cos 2ax\,dx.$ **3833.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x^2\cdot\cos 2ax\,dx.$

3834. Să se demonstreze formulele:

1) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2a}\sin a\alpha$; 2) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{a^2-x^2}\,dx=-\frac{\pi}{2}\cos a\alpha,$

unde $a\neq 0$, iar integralele trebuie înțelese în sensul valorii principale a lui Cauchy.

3835. Să se calculeze *transformata lui Laplace*

$$F(p)=\int_{0}^{+\infty}e^{-pt}f(t)\,dt \quad (p>0)$$

pentru funcția $f(t)$, dacă:

a) $f(t)=t^n$ (n este un număr natural);

b) $f(t)=\sqrt{t}$; e) $f(t)=\cos t$;

c) $f(t)=e^{at}$; f) $f(t)=\dfrac{1-e^{-t}}{t}$;

d) $f(t)=te^{-at}$; g) $f(t)=\sin\alpha\sqrt{t}$.

3836. Să se demonstreze formula (*integrala lui Lipschitz*)

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-at}J_0(bt)\,dt=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (a>0),$$

unde $J_0(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi)\,d\varphi$ este funcţia lui Bessel de indice zero (v. problema 3726).

3837. Să se calculeze *transformata lui Weierstrass*

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y)\,dy,$$

dacă

a) $f(y)=1$; c) $f(y)=e^{2ay}$;
b) $f(y)=y^2$; d) $f(y)=\cos ay$.

3838. *Polinoamele lui Cebîşev-Hermite* se definesc prin formulele

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Să se demonstreze că

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_m(x)\,H_n(x)\,e^{-x^2}\,dx=\begin{cases}0, & \text{dacă } m\neq n;\\ 2^n n!\,\sqrt{\pi}, & \text{dacă } m=n.\end{cases}$$

3839. Să se calculeze integrala

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}}\,d\xi$$

$$(\sigma_1>0,\quad \sigma_2>0),$$

care este foarte importantă în teoria probabilităţilor.

3840. Fie $f(x)$ o funcţie absolut integrabilă în intervalul $(-\infty,\ +\infty)$.

Să se demonstreze că integrala

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi$$

verifică *ecuaţia căldurii*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şi condiţia iniţială

$$\lim_{t\to+0} u(x,\ t)=f(x).$$

§ 4. Integrale euleriene

1°. Funcţia Γ. Pentru $x>0$ avem:

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Proprietatea fundamentală a funcţiei Γ este dată de *formula de recurenţă*

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

Dacă n este un număr întreg pozitiv, atunci

$$\Gamma(n)=(n-1)!;\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2°. Formula complementelor. Pentru x diferit de un număr întreg avem:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Această formulă ne permite să definim funcţia Γ pentru valorile negative ale variabilei.

3°. Funcţia B. Pentru $x>0$ şi $y>0$ avem:

$$B(x,\ y)=\int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Este valabilă formula

$$B(x,\ y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

3841. Să se demonstreze că funcţia $\Gamma(x)$ este continuă şi are derivate continue de orice ordin în domeniul $x>0$.

3842. Să se demonstreze că funcţia $B(x,\ y)$ este continuă şi are derivate continue de orice ordin în domeniul $x>0,\ y>0$.

Să se calculeze, cu ajutorul integralelor euleriene, următoarele integrale:

3843. $\int\limits_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx.$

3844. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0).$

3845. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx.$

3846. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}.$

3847. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{1+x^4}.$

3848. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx.$

3849. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$.

3850. $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$ (n este un întreg pozitiv).

Să se determine domeniul de existenţă şi să se exprime cu ajutorul integralelor euleriene următoarele integrale:

3851. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx \quad (n>0)$.

3852. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} dx$.

3853. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} \quad (a>0,\ b>0,\ n>0)$.

3854. $\int\limits_a^b \frac{(x-a)^m (b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}} dx$.

3855. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \quad (m>0)$.

3856. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx$.

3857. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x\, dx$.

3858. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k\cos x)^n} dx \quad (0<|k|<1)$.

3859. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n>0)$.

3860. $\int\limits_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx$.

3861. $\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx$.

3862. $\int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-ax} \ln x\, dx \quad (a>0)$.

3863. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx \quad (p>0)$.

3864. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} dx \quad (p>0)$.

3865. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{(1+x)\ln x} dx$.

3866. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x} dx \quad (0<p<1)$.

Indicaţie. Această integrală poate fi considerată ca

$$\lim_{\varepsilon\to+0} [B(p,\varepsilon) - B(1-p,\varepsilon)].$$

3867. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} dx \quad (0<\alpha<\beta)$.

3868. $\int\limits_0^1 \ln \Gamma(x)\, dx$.

3869. $\int\limits_a^{a+1} \ln \Gamma(x)\, dx \quad (a>0)$.

3870. $\int\limits_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x\, dx$.

3871. $\int\limits_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2n\pi x\, dx$ (n este un număr natural).

Să se demonstreze egalităţile:

3872. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$.

3873. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

3874. $\prod_{m=1}^{n} \int\limits_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$.

3875. $\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1$.

Folosind egalitatea $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt \ (x>0)$, să se calculeze integralele:

3876. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^m} dx \quad (0<m<1)$.

3877. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^m}\,dx \quad (0<m<2).$

3878. Să se demonstreze formulele lui Euler:

a) $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x;$

b) $\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x$

$$\left(\lambda>0,\ x>0,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

3879. Să se calculeze lungimea arcului curbei:

$$r^n=a^n\cos n\varphi \quad (a>0,\ n>0).$$

3880. Să se calculeze aria limitată de curba

$$|x|^n+|y|^n=a^n \quad (n>0,\ a>0).$$

§ 5. Formula integrală a lui Fourier

1°. Reprezentarea unei funcții printr-o integrală Fourier. Dacă 1) funcția $f(x)$ este definită pentru $-\infty<x<+\infty$, 2) este continuă pe porțiuni împreună cu derivata sa $f'(x)$ în orice interval finit și 3) este absolut integrabilă în intervalul $(-\infty, +\infty)$, ea admite în toate punctele în care este continuă, reprezentarea sub forma *integralei Fourier:*

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \qquad (1)$$

unde

$$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi \quad \text{și} \quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

In punctele de discontinuitate ale funcției $f(x)$, membrul întîi al formulei (1) trebuie înlocuit cu $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

Dacă funcția $f(x)$ este pară, ținînd seamă de aceeași observație cu privire la punctele de discontinuitate, formula (1) dă

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty} a(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda, \qquad (2)$$

unde

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi.$$

In mod analog obținem, dacă funcția $f(x)$ este impară:

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty} b(\lambda)\sin\lambda x\,d\lambda, \qquad (3)$$

unde

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi.$$

2°. Reprezentarea unei funcții printr-o integrală Fourier în intervalul $(0, +\infty)$. Funcția $f(x)$, definită în intervalul $(0, +\infty)$, absolut integrabilă în acest interval și avînd proprietatea 2), poate fi reprezentată după preferință în acest interval sau prin formula (2) *(prelungire pară)*, sau prin formula (3) *(prelungire impară)*.

Să se reprezinte printr-o integrală Fourier următoarele funcții:

3881. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{dacă } |x|<1;\\ 0, & \text{dacă } |x|>1\end{cases}$

3882. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, & \text{dacă } |x|<1;\\ 0, & \text{dacă } |x|>1.\end{cases}$

3883. $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)-\operatorname{sgn}(x-b) \quad (b>a).$

3884. $f(x)=\begin{cases}h\left(1-\frac{|x|}{a}\right), & \text{dacă } |x|\leqq a;\\ 0, & \text{dacă } |x|>a.\end{cases}$

3885. $f(x)=\frac{1}{a^2+x^2} \quad (a>0).$ **3886.** $f(x)=\frac{x}{a^2+x^2} \quad (a>0).$

3887. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{dacă } |x|\leqq\pi;\\ 0, & \text{dacă } |x|>\pi.\end{cases}$

3888. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{dacă } |x|\leqq\frac{\pi}{2};\\ 0, & \text{dacă } |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

3889. $f(t)=\begin{cases} A\sin\omega t, & \text{dacă } |t|\leq\frac{2\pi n}{\omega};\\ 0, & \text{dacă } |t|>\frac{2\pi n}{\omega}\end{cases}$ (n fiind un număr natural).

3890. $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

3891. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\cos\beta x$ $(\alpha>0)$.

3892. $f(x)=e^{-\alpha|x|}\sin\beta x$ $(\alpha>0)$.

3893. $f(x)=e^{-x^2}$.

3894. $f(x)=xe^{-x^2}$.

3895. Să se reprezinte funcţia

$$f(x)=e^{-x} \quad (0<x<+\infty)$$

printr-o integrală Fourier prelungind-o a) în mod par; b) în mod impar.

Să se calculeze *transformata Fourier*

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-itx}\,dt$$

pentru funcţia $f(t)$, dacă:

3896. $f(x)=e^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

3897. $f(x)=xe^{-\alpha|x|}$ $(\alpha>0)$.

3898. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3899. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\cos\alpha x$.

3900. Să se determine funcţiile $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$, dacă;

a) $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\,dy=\frac{1}{1+x^2}$;

b) $\int\limits_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\,dy=e^{-x}$ $(x>0)$.

CAPITOLUL VIII

INTEGRALE MULTIPLE ŞI INTEGRALE CURBILINII

§ 1. Integrale duble

1°. Calculul direct al unei integrale duble. Numim *integrală dublă* a funcţiei continue $f(x, y)$, extinsă domeniului Ω mărginit, închis şi a cărui arie există, numărul

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy=\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}}\sum_i\sum_j f(x_i, y_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j,$$

unde $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$ şi suma se ia pentru acele valori ale lui i şi j pentru care $(x_i, y_j)\in\Omega$.

Dacă domeniul Ω este dat de inegalităţile

$$a\leq x\leq b,\ y_1(x)\leq y\leq y_2(x),$$

unde $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ sînt funcţii continue pe segmentul $[a, b]$, integrala dublă corespunzătoare poate fi calculată după formula

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

2°. Schimbarea de variabile în integrala dublă. Dacă funcţiile continuu derivabile

$$x=x(u, v),\ y=y(u, v)$$

reprezintă o transformare care realizează o corespondenţă biunivocă a domeniului mărginit şi închis Ω din planul Oxy pe domeniul Ω' din planul Ouv şi dacă jacobianul

$$J=\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\neq 0,$$

este valabilă formula

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v),\ y(u, v))\,|J|\,du\,dv.$$

In particular, dacă trecem la coordonatele polare r şi φ după formulele $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, avem:

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

3901. Să se calculeze integrala

$$\iint_{\substack{0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq 1}} xy\,dxdy,$$

considerînd-o ca limita unei sume integrale obţinută împărţind domeniul de integrare în pătrate prin dreptele

$$x=\frac{i}{n},\quad y=\frac{j}{n}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ldots,\ n-1)$$

şi alegînd valorile funcţiei de sub semnul integrală în vîrfurile din dreapta ale acestor pătrate.

3902. Să se construiască suma integrală inferioară $\underline{S}$ şi suma integrală superioară $\overline{S}$ pentru funcţia $f(x, y)=x^2+y^2$ în domeniul $1\leq x\leq 2$, $1\leq y\leq 3$, divizînd acest domeniu în dreptunghiuri prin dreptele

$$x=1+\frac{i}{n},\quad y=1+\frac{2j}{n}\qquad (i,\ j=0,\ 1,\ldots,\ n).$$

Care sînt valorile limitelor acestor sume pentru $n\to\infty$?

3903. Să se calculeze valoarea apropiată a integralei

$$\iint_{x^2+y^2\leq 25}\frac{dx\,dy}{\sqrt{24+x^2+y^2}},$$

aproximînd domeniul de integrare printr-un sistem de pătrate înscrise, ale căror vîrfuri A_{ij} sînt situate în puncte avînd coordonatele numere întregi şi alegînd valorile funcţiei de sub semnul integrală în vîrfurile acestor pătrate care sînt mai depărtate de originea coordonatelor. Să se compare rezultatul obţinut cu valoarea exactă a acestei integrale.

3904. Să se calculeze valoarea apropiată a integralei

$$\iint_S \sqrt{x+y}\,dS,$$

unde S este un triunghi limitat de dreptele $x=0$, $y=0$ şi $x+y=1$, împărţind domeniul S, prin dreptele $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $x+y=\text{const}$, în patru triunghiuri egale şi alegînd valorile funcţiei de sub semnul integrală în punctele de intersecţie ale medianelor acestor triunghiuri.

3905. Domeniul S $\{x^2+y^2\leq 1\}$ este împărţit într-un număr finit de părţi carabile ΔS_i $(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$ de diametru mai mic decît δ. Pentru ce valori ale lui δ va avea loc inegalitatea

$$\left|\iint_S \sin(x+y)\,dS - \sum_{i=1}^{n}\sin(x_i+y_i)\,\Delta S_i\right| < 0{,}001,$$

unde $(x_i,\ y_i)\in\Delta S_i$?

Să se calculeze integralele:

3906. $\int_0^1 dx\int_0^1 (x+y)\,dy.$ **3907.** $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} xy^2\,dy.$

3908. $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sin^2\varphi\,dr.$

3909. Să se demonstreze egalitatea

$$\iint_R X(x)\,Y(y)\,dx\,dy = \int_a^A X(x)\,dx\cdot\int_b^B Y(y)\,dy,$$

dacă R este dreptunghiul:

$$a\leq x\leq A,\quad b\leq y\leq B.$$

3910. Să se calculeze

$$I=\int_a^A dx\int_b^B f(x,\ y)\,dy,$$

dacă

$$f(x,\ y)=F''_{xy}(x,\ y).$$

3911. Fie $f(x)$ o funcţie continuă în intervalul $a\leq x\leq b$. Să se demonstreze inegalitatea

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2\leq (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

unde semnul egal are loc numai dacă $f(x)=\text{const}$.

Indicaţie. Se va considera integrala

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x)-f(y)]^2\, dy.$$

3912. Ce semn au integralele:

a) $\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1} \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy$;

b) $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\, dx\, dy$;

c) $\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq 1\\ -1\leq y\leq 1-x}} \arcsin(x+y)\, dx\, dy$?

3913. Să se afle valoarea medie a funcţiei

$$f(x,\ y)=\sin^2 x \sin^2 y$$

în pătratul: $0\leq x\leq \pi$, $0\leq y\leq \pi$.

3914. Folosind teorema mediei, să se evalueze integrala

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leq 10} \frac{dx\, dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}.$$

3915. Să se afle valoarea medie a pătratului distanţei unui punct de pe cercul $(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2$ la originea coordonatelor.

Să se pună în problemele 3916-3922 limitele de integrare la integrala dublă $\iint\limits_{\Omega} f(x,\ y)\, dx\, dy$ într-o ordine arbitrară pentru domeniile indicate Ω.

3916. Ω este triunghiul cu vîrfurile $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$ $B(1,\ 1)$.

3917. Ω este triunghiul cu vîrfurile $O(0,\ 0)$, $A(2,\ 1)$, $B(-2,\ 1)$.

3918. Ω este trapezul cu vîrfurile $O(0,\ 0)$, $A(1,\ 0)$, $B(1,\ 2)$, $C(0,\ 1)$.

3919. Ω este cercul $x^2+y^2\leq 1$.

3920. Ω este cercul $x^2+y^2\leq y$.

3921. Ω este segmentul de parabolă limitat de curbele $y=x^2$ şi $y=1$.

3922. Ω este coroana circulară $1\leq x^2+y^2\leq 4$.

3923. Să se demonstreze *formula lui Dirichlet*

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x,\ y)\, dy=\int_0^a dy \int_y^a f(x,\ y)\, dx \quad (a>0).$$

Să se schimbe ordinea de integrare în următoarele integrale:

3924. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,\ y)\, dy$.

3925. $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,\ y)\, dy$.

3927. $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,\ y)\, dy$.

3926. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x,\ y)\, dy$.

3928. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,\ y)\, dy$.

3929. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,\ y)\, dy \quad (a>0)$.

3930. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,\ y)\, dy$.

3931. $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,\ y)\, dy$.

Să se calculeze următoarele integrale:

3932. $\iint\limits_{\Omega} xy^2\, dx dy$, dacă domeniul Ω este limitat de parabola $y^2=2px$ şi de dreapta $x=\frac{p}{2}$ $(p>0)$.

3933. $\iint\limits_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$ $(a>0)$, dacă domeniul Ω este limitat de arcul de cerc cel mai scurt care are centrul în punctul $(a,\ a)$ şi raza a (tangent la axele de coordonate), şi de axele de coordonate.

3934. $\iint\limits_{\Omega} |xy|\, dx dy$, dacă Ω este cercul de rază a cu centrul în originea coordonatelor.

3935. $\iint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\, dx dy$, dacă Ω este paralelogramul cu laturile $y=x$, $y=x+a$, $y=a$ şi $y=3a$ $(a>0)$.

3936. $\iint\limits_{\Omega} y^2\, dx dy$, dacă Ω este limitat de axa absciselor şi de prima buclă a cicloidei

$$x=a\ (t-\sin t),\quad y=a\ (1-\cos t)\quad (0\leq t\leq 2\pi).$$

Să se treacă, prin intermediul relaţiilor $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, la coordonatele polare r, φ în integrala dublă

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy,$$

punînd şi limitele de integrare, dacă:

3937. Ω este cercul $x^2+y^2\leq a^2$.

3938. Ω este cercul $x^2+y^2\leq ax$ $(a>0)$.

3939. Ω este coroana circulară $a^2\leq x^2+y^2\leq b^2$.

3940. Ω este triunghiul $0\leq x\leq 1$; $0\leq y\leq 1-x$.

3941. Ω este segmentul parabolic $-a\leq x\leq a$; $\frac{x^2}{a}\leq y\leq a$.

3942. In ce caz obţinem, după trecerea la coordonate polare, limite de integrare constante?

Să se treacă la coordonatele polare r şi φ, punînd $x=r\cos\varphi$ şi $y=r\sin\varphi$, şi să se scrie limitele de integrare într-o ordine sau alta în următoarele integrale:

3943. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x, y)\,dy$.

3944. $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$.

3945. $\int_0^2 dx\int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$.

3946. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x, y)\,dy$.

3947. $\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$, unde domeniul Ω este limitat de curba

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad (x\geq 0).$$

Presupunînd că r şi φ sînt coordonate polare, să se schimbe ordinea de integrare în următoarele integrale:

3948. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi, r)\,dr$ $(a>0)$.

3949. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r)\,dr$ $(a>0)$.

3950. $\int_0^a d\varphi\int_0^{\varphi} f(\varphi, r)\,dr$ $(0<a<2\pi)$.

Să se înlocuiască, folosind coordonatele polare, integralele duble prin integrale simple, în următoarele exemple:

3951. $\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$.

3952. $\iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$, unde $\Omega=\{|y|\leq|x|;\ |x|\leq 1\}$.

3953. $\iint_{x^2+y^2\leq x} f\left(\frac{y}{x}\right)dx\,dy$.

Să se calculeze, trecînd la coordonate polare, următoarele integrale duble:

3954. $\iint_{x^2+y^2\leq a^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3955. $\iint_{\pi^2\leq x^2+y^2\leq 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

3956. Sistemul de funcţii

$$u=\frac{y^2}{x},\quad v=\sqrt{xy}$$

transformă pătratul $S\{a<x<a+h,\ b<y<b+h\}$, $(a>0,\ b>0)$ în domeniul S'. Să se găsească raportul dintre aria domeniului S' şi aria domeniului S. Care este limita acestui raport pentru $h\to 0$?

Să se introducă în locul lui x şi y variabilele u şi v şi să se determine limitele de integrare în următoarele integrale duble:

3957. $\int_a^b dx\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\,dy$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$, dacă

$$u=x,\quad v=\frac{y}{x}.$$

3958. $\int_0^2 dx\int_{1-x}^{2-x} f(x, y)\,dy$, dacă $u=x+y$, $v=x-y$.

3959. $\iint_{\Omega} f(x, y)\,dx\,dy$, unde domeniul Ω este limitat de curbele

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ $(a>0)$, dacă

$$x=u\cos^4 v,\quad y=u\sin^4 v.$$

3960. Să se arate că schimbarea de variabile

$$x+y=\xi, \quad y=\xi\eta$$

transformă triunghiul $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$ în pătratul unitate $0\le\xi\le1$, $0\le\eta\le1$.

3961. Pentru ce transformare de variabile trece patrulaterul curbiliniu limitat de curbele $xy=1$, $xy=2$, $x-y+1=0$, $x-y-1=0$ $(x>0,\ y>0)$, într-un dreptunghi ale cărui laturi sînt paralele cu axele de coordonate?

Să se reducă integralele duble de mai jos la integrale simple, efectuînd schimbări de variabile corespunzătoare:

3962. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\le1} f(x+y)\,dx\,dy.$

3963. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le1} f(ax+by+c)\,dx\,dy \quad (a^2+b^2\ne0).$

3964. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} f(xy)\,dx\,dy$, unde domeniul Ω este limitat de curbele $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ $(x>0,\ y>0)$.

3965. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy$, unde domeniul Ω este limitat de curba

$$x^2+y^2=x+y.$$

Să se calculeze următoarele integrale duble:

3966. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\le1}(|x|+|y|)\,dx\,dy.$

3967. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, unde domeniul Ω este limitat de elipsa $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

3968. $\displaystyle\iint\limits_{x^4+y^4\le1}(x^2+y^2)\,dx\,dy.$

3969. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dx\,dy$, unde domeniul Ω este limitat de curbele $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$.

3970. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega} xy\,dx\,dy$, unde domeniul Ω este limitat de curbele $xy=1$, $x+y=\dfrac{5}{2}$.

3971. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\le x\le\pi\\0\le y\le\pi}}|\cos(x+y)|\,dx\,dy.$

3972. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le1}\left|\frac{x+y}{\sqrt2}-x^2-y^2\right|dx\,dy.$

3973. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{|x|\le1\\0\le y\le1}}\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy.$

Să se calculeze integralele următoarelor funcţii discontinue:

3974. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy.$

3975. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\le x\le2\\0\le y\le2}}[x+y]\,dx\,dy.$

3976. $\displaystyle\iint\limits_{x^2\le y\le4}\sqrt{[y-x^2]}\,dx\,dy.$

3977. Să se demonstreze că

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}x^my^n\,dx\,dy=0,$$

dacă m şi n sînt numere întregi pozitive şi dacă cel puţin unul din ele este impar.

3978. Să se găsească

$$\lim_{\rho\to0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)\,dx\,dy,$$

unde $f(x,y)$ este o funcţie continuă.

3979. Să se calculeze $F'(t)$, dacă

$$F(t)=\iint\limits_{\substack{0\le x\le t\\0\le y\le t}}e^{\frac{tx}{y^2}}\,dx\,dy.$$

3980. Să se calculeze $F'(t)$, dacă

$$F(t)=\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\le1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

3981. Să se calculeze $F'(t)$, dacă

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x, y)\,dx\,dy \quad (t>0).$$

3982. Să se demonstreze că dacă $f(x, y)$ este continuă, funcţia

$$u(x, y)=\frac{1}{2}\int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta)\,d\eta$$

verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x, y).$$

3983. Să presupunem că liniile de nivel ale funcţiei $f(x, y)$ sînt curbe simple, închise şi că domeniul $S(v_1, v_2)$ este limitat de curbele $f(x, y)=v_1$ şi $f(x, y)=v_2$.

Să se demonstreze că

$$\iint\limits_{S(v_1, v_2)} f(x, y)\,dx\,dy=\int_{v_1}^{v_2} vF'(v)\,dv,$$

unde $F(v)$ este aria limitată de curbele $f(x, y)=v_1$ şi $f(x, y)=v$.

Indicaţie. Se va descompune domeniul de integrare în părţi cuprinse între curbe de nivel infinit apropiate ale funcţiei $f(x, y)$.

§ 2. Calculul ariilor

Aria domeniului S, situat în planul Oxy, este dată de formula

$$S=\iint\limits_S dx\,dy.$$

Să se calculeze aria limitată de următoarele curbe:

3984. $xy=a^2$, $x+y=\frac{5}{2}a$ $(a>0)$.

3985. $y^2=2px+p^2$, $y^2=-2qx+q^2$ $(p>0,\ q>0)$.

3986. $(x-y)^2+x^2=a^2$ $(a>0)$.

Să se calculeze, trecînd la coordonate polare, ariile limitate de următoarele curbe:

3987. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$; $x^2+y^2\geq a^2$.

3988. $(x^3+y^3)=x^2+y^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

3989. $(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)$ $(a>0)$.

3990. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$; $(x-a)^2+(y-a)^2\leq a^2$ $(a>0)$.

Trecînd prin intermediul formulelor

$$x=ar\cos^\alpha\varphi, \quad y=br\sin^\alpha\varphi \qquad (r\geq 0)$$

la coordonatele polare generalizate r, φ, unde a, b şi α sînt nişte constante convenabil alese şi $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$, să se calculeze ariile limitate de următoarele curbe (se consideră că parametrii sînt pozitivi):

3991. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$.

3992. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$; $x=0$, $y=0$.

3993. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3994. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ $(x>0,\ y>0)$.

3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$; $x=0$, $y=0$.

Făcînd o schimbare de variabile convenabilă, să se calculeze ariile mărginite de curbele:

3996. $x+y=a$, $x+y=b$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b;\ 0<\alpha<\beta)$.

3997. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x$, $y=2x$ $(x>0;\ y>0)$.

3998. $y^2=2px$, $y^2=2qx$, $x^2=2ry$, $x^2=2sy$ $(0<p<q;\ 0<r<s)$.

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$, $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2$,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}, \quad 4\frac{x}{a}=\frac{y}{b} \qquad (a>0,\ b>0).$$

4000. $\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda-c^2}=1$, unde λ ia următoarele valori: $\frac{1}{3}c^2$, $\frac{2}{3}c^2$, $\frac{4}{3}c^2$, $\frac{5}{3}c^2$ $(x>0;\ y>0)$.

4001. Să se calculeze aria limitată de elipsa

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1,$$

unde

$$\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0.$$

4002. Să se calculeze aria limitată de elipsele $\frac{x^2}{\mathrm{ch}^2 u}+\frac{y^2}{\mathrm{sh}^2 u}=c^2$ $(u=u_1,\ u_2)$ şi de hiperbolele $\frac{x^2}{\cos^2 v}-\frac{y^2}{\sin^2 v}=c^2$ $(v=v_1,\ v_2)$

$$(0<u_1<u_2\,;\ 0<v_1<v_2\,;\ x>0,\ y>0).$$

Indicaţie. Vom pune

$$x=c\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\quad y=c\,\mathrm{sh}\,u\sin v.$$

4003. Să se calculeze aria secţiunii suprafeţei

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$$

prin planul $x+y+z=b$.

4004. Să se calculeze aria secţiunii suprafeţei

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

prin planul $z=1-2(x+y)$.

§ 3. Calculul volumelor

Volumul cilindroidului limitat sus de suprafata continuă $z=f(x,y)$, jos, de planul $z=0$ şi lateral de o suprafaţă cilindrică dreaptă care intersectează

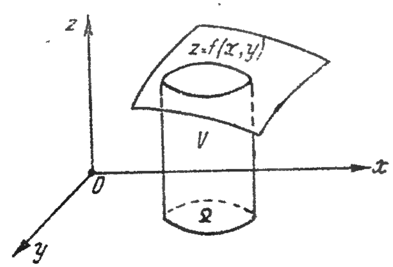

Fig. 14

planul Oxy după domeniul a cărui arie există (fig. 14), este egal cu

$$V=\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy.$$

4005. Să se deseneze corpul al cărui volum este egal cu integrala

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x^2+y^2)\,dy.$$

4006. Să se reprezinte corpurile ale căror volume sînt date de următoarele integrale duble:

a) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\le x+y\le 1\\ x\ge 0,\ y\ge 0}}(x+y)\,dx\,dy$;

b) $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,dx\,dy$;

c) $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}(x^2+y^2)\,dx\,dy$;

d) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le x}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$;

e) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{1\le x\le 2\\ x\le y\le 2x}}\sqrt{xy}\,dx\,dy$;

f) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$.

Să se calculeze volumele corpurilor mărginite de următoarele suprafeţe:

4007. $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$

4008. $x+y+z=a,\ x^2+y^2=R^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (a\ge R\sqrt{2}).$

4009. $z=x^2+y^2,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0.$

4010. $z=\cos x\cos y,\ z=0,\ |x+y|\le\frac{\pi}{2},\ |x-y|\le\frac{\pi}{2}.$

4011. $z=\sin\frac{\pi y}{2x},\ z=0,\ y=x,\ y=0,\ x=\pi.$

4012. $z=xy,\ x+y+z=1,\ z=0.$

Să se calculeze, trecînd la coordonate polare, volumele corpurilor mărginite de următoarele suprafeţe:

4013. $z^2=xy,\ x^2+y^2=a^2.$

4014. $z=x+y,\ (x^2+y^2)^2=2xy,\ z=0\quad (x>0,\ y>0).$

4015. $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2=x,\ x^2+y^2=2x,\ z=0.$

4016. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2\ge a|x|\quad (a>0).$

4017. $x^2+y^2-az=0,\ (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),\ z=0\quad (a>0).$

4018. $z=e^{-(x^2+y^2)},\ z=0,\ x^2+y^2=R^2.$

4019. $z=c\cos\dfrac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2a}$, $x^2+y^2=a^2$,

$y=x\operatorname{tg}\alpha$, $y=x\operatorname{tg}\beta$ $\quad(0\leq\alpha<\beta\leq 2\pi)$.

4020. $z=x^2+y^2$, $z=x+y$.

Să se calculeze volumele corpurilor mărginite de următoarele suprafeţe (se presupune că parametrii sînt pozitivi):

4021. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ $\quad(z>0)$.

4022. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

4023. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}$.

4024. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2+\dfrac{z}{c}=1$, $z=0$.

4025. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4026. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$.

4027. $z^2=xy$, $x+y=a$, $x+y=b$ $\quad(0<a<b)$.

4028. $z=x^2+y^2$, $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=\dfrac{x}{2}$, $y=2x$.

4029. $z=xy$, $x^2=y$, $x^2=2y$, $y^2=x$, $y^2=2x$.

4030. $z=c\sin\dfrac{\pi xy}{a^2}$, $z=0$, $xy=a^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$

$(0<\alpha<\beta;\ x>0)$

4031. $z=x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}$, $z=0$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4032. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z}{c}=1$, $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.

4033. $z=c\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $z=0$, $\sqrt{x^2+y^2}=a\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ $\quad(y\geq 0)$.

4034. $\dfrac{x^n}{a^n}+\dfrac{y^n}{b^n}+\dfrac{z^n}{c^n}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $\quad(n>0)$.

4035. $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^n+\left(\dfrac{z}{c}\right)^m=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $\quad(n>0,\ m>0)$.

§ 4. Calculul ariilor suprafeţelor

1°. *Cazul cînd suprafaţa este dată sub forma explicită.* Aria unei suprafeţe strîmbe netede $z=z(x,y)$ este dată de integrala

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy,$$

unde Ω este proiecţia suprafeţei date pe planul Oxy.

2°. *Cazul cînd suprafaţa este dată sub forma parametrică.* Dacă ecuaţia suprafeţei este dată sub forma parametrică:

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v)\quad z=z(u,v),$$

unde $(u,v)\in\Omega$ şi Ω este un domeniu mărginit, închis şi carabil, atunci, presupunînd că funcţiile x, y şi z sînt continuu derivabile în domeniul Ω, avem următoarea formulă pentru aria suprafeţei:

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv,$$

unde

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. Să se calculeze aria porţiunii suprafeţei $az=xy$, cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2+y^2=a^2$.

4037. Să se calculeze aria suprafeţei corpului mărginit de suprafeţele $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

4038. Să se calculeze aria sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$, cuprinsă în interiorul cilindrului $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b\leq a)$.

4039. Să se calculeze aria suprafeţei $z^2=2xy$, cuprinsă între planele $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

4040. Să se calculeze aria suprafeţei $x^2+y^2+z^2=a^2$, situată în exteriorul cilindrilor $x^2+y^2=\pm ax$ (problema lui Viviani).

4041. Să se calculeze aria suprafeţei $z=\sqrt{x^2+y^2}$, situată în interiorul cilindrului $x^2+y^2=2x$.

4042. Să se calculeze aria suprafeţei $z=\sqrt{x^2-y^2}$, situată în interiorul cilindrului $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

4043. Să se calculeze aria suprafeţei $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ cuprinsă între planele $x-y=\pm 1$, $x+y=\pm 1$.

4044. Să se calculeze aria suprafeţei $x^2+y^2=2az$, situată în interiorul cilindrului $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

4045. Să se calculeze aria suprafeţei $x^2+y^2=a^2$ cuprinsă între planele $x+z=0$, $x-z=0$ $(x>0,\ y>0)$.

4046. Să se calculeze aria şi volumul corpului mărginit de suprafeţele $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$, $x+y+z=2a$ $(a>0)$.

4047. Să se calculeze aria porţiunii de sferă cuprinsă între două paralele şi două meridiane.

4048. Să se calculeze aria porţiunii de elicoid

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h\varphi,\quad \text{unde}\quad 0<r<a,\quad 0<\varphi<2\pi.$$

4049. Să se calculeze aria porţiunii de tor

$$x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,\quad y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi,\quad z=a\sin\psi$$

$(0<a\leq b)$, cuprinsă între meridianele $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$ şi paralelele $\psi=\psi_1$, $\psi=\psi_2$.

Care este aria întregului tor?

4050. Să se calculeze unghiul solid ω sub care se vede, din originea coordonatelor, dreptunghiul $x=a>0$, $0\leq y\leq b$, $0\leq z\leq c$.

Să se deducă o formulă aproximativă pentru ω, dacă a este mare.

§ 5. Aplicaţiile integralelor duble în mecanică

1°. Centru de greutate. Dacă x_0 şi y_0 sînt coordonatele centrului de greutate al plăcii Ω din planul Oxy şi dacă $\rho=\rho(x,y)$ este densitatea plăcii, atunci

$$x_0=\frac{1}{M}\iint_\Omega \rho x\,dx\,dy,\quad y_0=\frac{1}{M}\iint_\Omega \rho y\,dx\,dy, \tag{1}$$

unde $M=\iint_\Omega \rho\,dx\,dy$ este masa plăcii;

Dacă placa este omogenă, putem lua în formulele (1) $\rho=1$.

2°. Momente de inerţie. *Momentele de inerţie* I_x şi I_y ale plăcii Ω din planul Oxy, în raport cu axele de coordonate Ox şi Oy, se exprimă prin formulele

$$I_x=\iint_\Omega \rho y^2\,dx\,dy,\quad I_y=\iint_\Omega \rho x^2\,dx\,dy, \tag{2}$$

unde $\rho=\rho(x,y)$ este densitatea plăcii.

Punînd în formulele (2) $\rho=1$, obţinem *momentele de inerţie geometrice* ale unei figuri plane.

4051. Să se afle masa plăcii pătrate de latură a, dacă densitatea plăcii este proporţională în fiecare punct cu distanţa acestui punct la unul din vîrfurile pătratului şi este egală cu ρ_0 în centrul pătratului.

Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor omogene limitate de următoarele curbe:

4052. $ay=x^2$, $x+y=2a$ $(a>0)$.

4053. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$.

4054. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ $(x>0,\ y>0)$.

4055. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2}$.

4056. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ $(x>0,\ y>0)$.

4057. $r=a(1+\cos\varphi)$, $\varphi=0$.

4058. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$, $y=0$.

4059. Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii circulare $x^2+y^2\leq a^2$, dacă densitatea ei în punctul $M(x,y)$ este proporţională cu distanţa punctului M la punctul $A(a,0)$.

4060. Să se determine curba pe care o descrie centrul de greutate al unei arii variabile limitată de curbele

$$y=\sqrt{2px},\quad y=0,\quad x=X.$$

Să se calculeze momentele de inerţie I_x şi I_y, în raport cu axele de coordonate Ox şi Oy, ale ariilor $(\rho=1)$ limitate de următoarele curbe:

4061. $\frac{x}{b_1}+\frac{y}{h_2}=1$, $\frac{x}{b_2}+\frac{y}{h}=1$, $y=0$ $(b_1>0,\ b_2>0,\ h>0)$.

4062. $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, $x=0$, $y=0$ $(0\leq x\leq a)$.

4063. $r=a(1+\cos\varphi)$.

4064. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

4065. $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $x=2y$, $2x=y$ $(x>0,\ y>0)$.

4066. Să se calculeze momentul polar

$$I_0=\iint_S (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

al ariei S, mărginită de curba

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

4067. Să se demonstreze formula

$$I_l=I_{l_0}+Sd^2,$$

unde I_l, I_{l_0} sînt momentele de inerţie ale ariei S în raport cu două axe paralele l şi l_0, dintre care l_0 trece prin centrul de greutate al ariei, iar d este distanţa dintre aceste două axe.

4068. Să se demonstreze că momentul de inerţie al ariei S în raport cu o dreaptă care trece prin centrul de greutate $O(0,0)$ şi face un unghi α cu axa Ox, este egal cu

$$I=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha,$$

unde I_x şi I_y sînt momentele de inerţie ale ariei S în raport cu axele Ox şi Oy, iar I_{xy} este momentul de inerţie centrifugal:

$$I_{xy}=\iint\limits_S \rho xy\,dx\,dy.$$

4069. Să se calculeze momentul de inerţie al triunghiului echilateral de latură a în raport cu dreapta care trece prin centrul de greutate al triunghiului şi care face un unghi α cu înălţimea lui.

4070. Să se determine forţa datorită presunii apei care se exercită pe peretele lateral $x\geq 0$ al vasului cilindric $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, dacă nivelul apei este $z=h$.

4071. O sferă de rază a este cufundată într-un lichid de densitate constantă δ, la o adîncime h (măsurată de la centrul sferei), unde $h\geq a$. Să se găsească forţa care se exercită pe porţiunea superioară şi pe porţiunea inferioară a suprafeţei sferei, datorită presiunii lichidului.

4072. Un cilindru circular drept avînd raza bazei a şi înălţimea b este cufundat în întregime într-un lichid de densitate δ în aşa fel, încît centrul său se află la adîncimea h sub nivelul apei, iar axa sa formează un unghi α cu verticala. Să se determine forţa care se exercită pe baza inferioară şi pe baza superioară a cilindrului datorită presiunii lichidului.

4073. Să se determine forţa de atracţie pe care o exercită cilindrul omogen $x^2+y^2\leq a^2$, $0\leq z\leq h$, asupra punctului material $P(0,0,b)$, dacă masa cilindrului este egală cu M şi masa punctului este egală cu m.

4074. Distribuţia presiunii unui corp pe *suprafaţa de strivire* (turtire).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$$

este dată de formula $p=p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$.

Să se determine presiunea medie a corpului pe această suprafaţă.

4075. O pajişte avînd forma unui dreptunghi cu laturile a şi b este acoperită uniform cu fîn cosit cu densitatea egală cu p kg/m². Care este lucrul mecanic minim pe care trebuie să-l efectuăm pentru a strînge tot fînul în centrul pajiştei, dacă lucrul de transport al greutăţii de P kg la distanţa r este egală cu kPr $(0<k<1)$.

§ 6. Integrale triple

1°. Calculul direct al unei integrale triple. Dacă funcţia $f(x, y, z)$ este continuă, iar domeniul V este mărginit, fiind definit prin următoarele inegalităţi:

$$x_1\leq x\leq x_2,\quad y_1(x)\leq y\leq y_2(x),\quad z_1(x,y)\leq z\leq z_2(x,y),$$

unde $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ sînt funcţii continue, atunci integrala triplă a funcţiei $f(x,y,z)$, extinsă la domeniul V, poate fi calculată după formula

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz.$$

Uneori este mai comod să folosim formula

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\iint\limits_{S(x)}f(x,y,z)\,dy\,dz,$$

unde $S(x)$ este secţiunea domeniului V prin planul $X=x$.

2°. Schimbarea variabilelor în integrala triplă. Dacă domeniul V mărginit, închis, al cărui volum există, din spaţiul $Oxyz$, se transformă cu ajutorul funcţiilor continuu derivabile $x=x(u,v,w)$, $y=y(u,v,w)$, $z=z(u,v,w)$ în domeniul V' din spaţiul $O'uvw$, corespondenţa fiind biunivocă, şi dacă

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0 \text{ pentru } (u,v,w)\in V',$$

atunci este valabilă formula

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w))\,|J|\,du\,dv\,dw.$$

Ca un caz particular avem: 1) *sistemul de coordonate cilindrice* φ, r, h, unde

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,$$

şi

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,h)}=r,$$

şi 2) *sistemul de coordonate sferice* φ, ψ, r, unde

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

şi

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=r^2\cos\psi.$$

Să se calculeze următoarele integrale triple:

4076. $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, unde domeniul V este limitat de suprafeţele $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

4077. $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, unde domeniul V este limitat de suprafeţele $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4078. $\iiint\limits_V xyz\,dx\,dy\,dz$, unde domeniul V este limitat de suprafeţele $x^2+y^2+z^2=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4079. $\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$, unde domeniul V este limitat de suprafaţa

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

4080. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, domeniul V fiind limitat de suprafeţele

$$x^2+y^2=z^2,\qquad z=1.$$

Să se scrie următoarele integrale triple, modificînd în diverse moduri ordinea de integrare:

4081. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{x+y} f(x, y, z)\,dz.$

4082. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\,dz.$

4083. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,dz.$

Să se înlocuiască următoarele integrale triple prin integrale simple:

4084. $\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^\xi d\eta\int\limits_0^\eta f(\zeta)\,d(\zeta).$ **4085.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{x+y} f(z)\,dz,$

4086. Să se calculeze

$$\int\limits_a^A dx\int\limits_b^B dy\int\limits_c^C f(x, y, z)\,dz,$$

dacă $f(x, y, z)=F'''_{xyz}(x, y, z)$, iar a, b, c, A, B, C sînt constante.

Să se calculeze, trecînd la coordonate sferice, integralele:

4087. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, unde domeniul V este limitat de suprafaţa $x^2+y^2+z^2=z$.

4088. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz.$

4089. Să se treacă la coordonate sferice în integrala

$$\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz,$$

domeniul V fiind limitat de suprafeţele $z=x^2+y^2$, $x=y$, $x=1$, $y=0$, $z=0$.

4090. Efectuînd o transformare de variabile corespunzătoare, să se calculeze integrala triplă

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dx\,dy\,dz,$$

unde V este interiorul elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$

4091. Să se calculeze, trecînd la coordonate cilindrice, integrala

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$$

unde domeniul V este limitat de suprafeţele $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

4092. Să se calculeze integrala

$$\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz,$$

unde domeniul V este limitat de suprafeţele $z=ay^2$, $z=by^2$, $y>0$, $(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(0<\alpha<\beta)$, $z=h$ $(h>0)$.

4093. Să se calculeze integrala $\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$, unde domeniul V este situat în octantul $x>0$, $y>0$, $z>0$, limitat de suprafeţele:

$$z=\frac{x^2+y^2}{m},\quad z=\frac{x^2+y^2}{n},\ xy=a^2,\ xy=b^2,\ y=\alpha x,\ y=\beta x$$

$$(0<a<b;\quad 0<\alpha<\beta;\quad 0<m<n).$$

4094. Să se afle valoarea medie a funcţiei

$$f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$$

în domeniul $x^2+y^2+z^2\leqq x+y+z$.

4095. Să se afle valoarea medie a funcţiei

$$f(x,\ y,\ z)=e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}$$

în domeniul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqq 1$.

4096. Folosind teorema mediei, să se evalueze integrala

$$u=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqq R^2}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

unde $a^2+b^2+c^2>R^2$.

4097. Să se demonstreze că dacă funcţia $f(x,\ y,\ z)$ este continuă în domeniul V şi

$$\iiint_\omega f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=0,$$

oricare ar fi domeniul $\omega\subset V$, atunci $f(x,\ y,\ z)\equiv 0$ pentru $(x,\ y,\ z)\in V$.

4098. Să se calculeze $F'(t)$, dacă:

a) $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqq t^2} f(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$,

unde f este o funcţie derivabilă;

b) $F(t)=\iiint\limits_{\substack{0\leqq x\leqq t\\0\leqq y\leqq t\\0\leqq z\leqq t}} f(xyz)\,dx\,dy\,dz$,

unde f este o funcţie derivabilă.

4099. Să se calculeze

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqq 1} x^m y^n z^p\,dx\,dy\,dz,$$

unde m, n şi p sînt numere întregi nenegative.

4100. Să se calculeze *integrala lui Dirichlet*

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s\,dx\,dy\,dz$$

$$(p>0,\quad q>0,\quad r>0,\ s>0),$$

unde domeniul V este limitat de planele $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, punînd

$$x+y+z=\xi;\quad y+z=\xi\eta;\quad z=\xi\eta\zeta.$$

§ 7. Calculul volumelor cu ajutorul integralelor triple

Volumul domeniului V se exprimă prin formula

$$V=\iiint_V dx\,dy\,dz.$$

Să se calculeze volumele corpurilor limitate de următoarele suprafeţe:

4101. $z=x^2+y^2,\ z=2x^2+2y^2,\ y=x,\ y=x^2.$

4102. $z=x+y,\ z=xy,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$

4103. $x^2+z^2=a^2,\ x+y=\pm a,\ x-y=\pm a.$

4104. $az=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0).$

4105. $az=a^2-x^2-y^2,\ z=a-x-y,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (a>0).$

4106. $z=6-x^2-y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$

Trecînd la coordonate sferice sau cilindrice, să se calculeze volumele limitate de următoarele suprafeţe:

4107. $x^2+y^2+z^2=2az,\ x^2+y^2\leqq z^2.$

4108. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2).$

4109. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz.$

4110. $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2+z^2=b^2,\quad x^2+y^2+z^2\ (z\geqq 0)$ $(0<a<b).$

In exemplele următoare este indicat să se întrebuinţeze coordonatele polare generalizate

$$r,\ \varphi \text{ şi } \psi\ \left(r\geqq 0;\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\leqq\psi\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

care sînt date de formulele

$$\left.\begin{aligned} x&=ar\cos^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\\ y&=br\sin^{\alpha}\varphi\cos^{\beta}\psi,\\ z&=cr\sin^{\beta}\psi \end{aligned}\right\}$$

($a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta$ fiind constante),

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

Să se calculeze volumele corpurilor limitate de suprafeţele:

4111. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}.$

4112. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$

4113. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}.$

4114. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^4}{c^4}=1.$

4115. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1.$

Să se calculeze, folosind o schimbare de variabile convenabilă, volumele corpurilor limitate de următoarele suprafeţe (în ipoteza că parametrii iau valori pozitive):

4116. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\quad (x>0,\ y>0,\ z>0).$

4117. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^4=\frac{xyz}{abc}\quad (x>0,\ y>0,\ z>0).$

4118. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\quad (x>0,\ y>0,\ z>0).$

4119. $z=x^2+y^2,\ z=2(x^2+y^2),\ xy=a^2,\ xy=2a^2,\ x=2y,\ 2x=y$ $(x>0,\ y>0).$

4120. $x^2+z^2=a^2,\ x^2+z^2=b^2,\ x^2-y^2-z^2=0\quad (x>0).$

4121. $(x^2+y^2+z^2)^3=\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}.$

4122. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{h}\cdot e^{-\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}.$

4123. $\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right),\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$ $x=0,\ x=a.$

4124. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\ln\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}},\quad x=0,\quad z=0,\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

4125. In ce raport este împărţit volumul sferei $x^2+y^2+z^2=4az$ de suprafaţa $x^2+y^2+az=4a^2$?

4126. Să se afle volumul şi aria corpului limitat de suprafeţele $x^2+y^2=az,\ z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0).$

4127. Să se calculeze volumul paralelipipedului limitat de planele

$$a_ix+b_iy+c_iz=\pm h_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

dacă

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

4128. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafaţa

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2,$$

dacă

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

4129. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafaţa

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{h}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2} \qquad (n>1).$$

4130. Să se calculeze volumul corpului situat în octantul $Oxyz$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$, limitat de suprafeţele:

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^n}{b^n}+\frac{z^p}{c^p}=1 \quad (m>0,\ n>0,\ p>0),\ x=0,\ y=0,\ z=0.$$

§ 8. Aplicaţiile integralelor triple în mecanică

1°. Masa unui corp. Dacă un corp ocupă volumul V şi $\rho=\rho(x, y, z)$ este densitatea lui în punctul (x, y, z), *masa acestui corp* este egală cu

$$M=\iiint\limits_V \rho\, dx\, dy\, dz.$$

2°. Centrul de greutate al unui corp. *Coordonatele centrului de greutate* (x_0, y_0, z_0) al unui corp se calculează după formulele

$$\left.\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\, dx\, dy\, dz, \\ y_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\, dx\, dy\, dz, \\ z_0&=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Dacă corpul este omogen, putem pune în formulele (1) $\rho=1$.

3°. Momente de inerţie. Numim *momente de inerţie ale unui corp în raport cu planele de coordonate*, integralele

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \rho z^2\, dx\, dy\, dz,\quad I_{yz}=\iiint\limits_V \rho x^2\, dx\, dy\, dz,\quad I_{zx}=\iiint\limits_V \rho y^2\, dx\, dy\, dz.$$

Numim *moment de inerţie al unui corp în raport cu o axă oarecare l*, integrala

$$I_l=\iiint\limits_V \rho r^2\, dx\, dy\, dz,$$

unde r este distanţa punctului curent al corpului (x, y, z) la axa l. In particular, avem pentru axele de coordonate Ox, Oy, Oz respectiv:

$$I_x=I_{xy}+I_{xz},\quad I_y=I_{yx}+I_{yz},\quad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

Numim *moment de inerţie al unui corp în raport cu originea coordonatelor*, integrala

$$I_0=\iiint\limits_V \rho\,(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Avem evident:

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}.$$

4°. Potenţialul cîmpului gravitic. Numim *potenţial newtonian al unui corp* în punctul $P(x, y, z)$, integrala

$$u(x, y, z)=\iiint\limits_V \rho(\xi, \eta, \zeta)\frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r},$$

V fiind volumul corpului, $\rho=\rho(\xi, \eta, \zeta)$ — densitatea corpului, şi

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

Un punct material de masă m este atras de un corp cu o forţă ale cărei proiecţii X, Y, Z pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz sînt:

$$X=km\frac{\partial u}{\partial x}=km\iiint\limits_V \rho\,\frac{\xi-x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Y=km\frac{\partial u}{\partial y}=km\iiint\limits_V \rho\,\frac{\eta-y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$Z=km\frac{\partial u}{\partial z}=km\iiint\limits_V \rho\,\frac{\zeta-z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

unde k este constanta atracţiei gravitaţionale.

4131. Să se afle masa corpului care ocupă volumul unitate $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, dacă densitatea acestui corp în punctul $M(x, y, z)$ este dată de formula $\rho = x + y + z$.

4132. Să se afle masa corpului ocupînd domeniul infinit $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$, dacă densitatea lui variază după legea $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, unde $\rho_0 > 0$ şi $k > 0$ sînt constante.

Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale corpurilor omogene mărginite de următoarele suprafeţe:

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

4134. $z = x^2 + y^2$, $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4135. $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \frac{p}{2}$, $z = 0$.

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4137. $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$ $(z > 0)$.

4138. $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z$.

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{xyz}{abc}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

4140. $z = x^2 + y^2$, $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$.

4141. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$(n > 0,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0).$$

4142. Să se determine coordonatele centrului de greutate al cubului definit de relaţiile

$$0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1,$$

dacă densitatea sa în punctul (x, y, z) este egală cu:

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

unde $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$.

Să se determine momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate ale corpurilor omogene mărginite de următoarele suprafeţe (parametrii sînt pozitivi):

4143. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

4144. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

4145. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_2}{c^2}$, $z = c$.

4146. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$.

4147. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Să se determine momentele de inerţie în raport cu axa Oz ale corpurilor omogene mărginite de suprafeţele:

4148. $z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$, $z = 0$.

4149. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$.

4150. Să se calculeze momentul de inerţie al sferei neomogene $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ de masă M în raport cu diametrul ei, dacă densitatea sferei în punctul curent $P(x, y, z)$ este proporţională cu distanţa acestui punct la centrul sferei.

4151. Să se demonstreze egalitatea

$$I_l = I_{l_0} + Md^2,$$

unde I_l este momentul de inerţie al corpului faţă de o axă oarecare l, I_{l_0} este momentul de inerţie faţă de axa l_0, paralelă cu l şi care trece prin centrul de greutate al corpului, d este distanţa între aceste axe, iar M este masa corpului.

4152. Să se demonstreze că momentul de inerţie al unui corp de volum V, în raport cu axa l, care trece prin centrul său de greutate $O(0, 0, 0)$ şi care face unghiurile α, β, γ cu axele de coordonate, este egal cu:

$$I_l = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$
$$- 2K_{xz}\cos\alpha\cos\gamma - 2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma,$$

unde I_x, I_y, I_z sînt momentele de inerţie ale corpului în raport cu axele de coordonate şi

$$K_{xy} = \iiint_V \rho\, xy\, dx\, dy\, dz, \quad K_{xz} = \iiint_V \rho\, xz\, dx\, dy\, dz,$$

$$K_{yz} = \iiint_V \rho yz\, dx\, dy\, dz$$

sînt momentele centrifugale.

4153. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu dreapta $x=y=z$ al cilindrului omogen $x^2+y^2 \leq a^2$, $z=\pm h$, de densitatea ρ_0.

4154. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu originea coordonatelor al corpului omogen de densitate ρ_0, mărginit de suprafaţa

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2).$$

4155. Să se calculeze în punctul $P(x, y, z)$ potenţialul newtonian al sferei omogene $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq R^2$ de densitate ρ_0.

Indicaţie. Vom admite că axa $O\zeta$ trece prin punctul $P(x, y, z)$.

4156. Să se calculeze în punctul $P(x, y, z)$ potenţialul newtonian al stratului sferic $R_1^2 \leq \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \leq R_2^2$, dacă densitatea $\rho=f(R)$, unde f este o funcţie cunoscută şi $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

4157. Să se calculeze în punctul $P(0, 0, z)$, potenţialul newtonian al cilindrului $\xi^2+\eta^2 \leq a^2$, $0 \leq \zeta \leq h$, de densitate constantă ρ_0.

4158. Cu ce forţă atrage sfera omogenă de rază R şi de masă M punctul material $P(0, 0, a)$ de masă m?

4159. Să se calculeze forţa de atracţie pe care o exercită cilindrul omogen $\xi^2+\eta^2 \leq a^2$, $0 \leq \zeta \leq h$, de densitate ρ_0, asupra punctului $P(0, 0, z)$ de masă unu.

4160. Să se calculeze forţa cu care este atras, de sectorul sferic omogen, de densitate ρ_0, un punct material de masă unu situat în vîrful acestuia, dacă raza sferei este egală cu R, iar unghiul secţiunii axiale a sectorului este egal cu 2α.

§ 9. Integrale duble şi triple improprii

1. Cazul unui domeniu infinit. Dacă domeniul bidimensional Ω nu este mărginit şi funcţia $f(x, y)$ este continuă în Ω, punem prin definiţie

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\Omega_n} f(x, x)\, dx\, dy, \qquad (1)$$

unde Ω_n este un şir arbitrar de domenii mărginite închise şi carabile, a căror reuniune este egală cu domeniul Ω. Dacă limita din membrul al doilea există şi este independentă de alegerea şirului Ω_n, vom spune că integrala respectivă *este convergentă*; în caz contrar vom spune că integrala *este divergentă*.

In mod analog se defineşte integrala triplă improprie a unei funcţii continue, extinsă la un domeniu tridimensional nemărginit.

2°. Cazul unei funcţii discontinue. Dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă peste tot în domeniul mărginit şi închis Ω cu excepţia punctului $P(a, b)$, atunci punem:

$$\iint_{\Omega} f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{\Omega-U_\varepsilon} f(x, y)\, dx\, dy, \qquad (2)$$

unde U_ε este o ε-vecinătate a punctului P, şi în cazul cînd limita din membrul al doilea al egalităţii (2) există vom spune că *integrala este convergentă*; în caz contrar vom spune că *integrală este divergentă*.

Presupunînd că în vecinătatea punctului $P(a, b)$ este valabilă egalitatea

$$f(x, y)=\frac{\varphi(x, y)}{r^\alpha},$$

valoarea absolută a funcţiei $\varphi(x, y)$ fiind cuprinsă între două numere pozitive m şi M şi $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, obţinem că 1) pentru $\alpha<2$ integrala (2) este convergentă; 2) pentru $\alpha \geq 2$ integrala este divergentă.

In mod analog se defineşte integrala improprie (2), dacă funcţia $f(x, y)$ are o linie de discontinuitate.

Noţiunea de integrală improprie a unei funcţii discontinue se extinde uşor la cazul integralelor triple.

Să se studieze convergenţa integralelor improprii cu domeniul de integrare infinit $(0<m \leq |\varphi(x, y)| \leq M)$:

4161. $\displaystyle\iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x, y)}{(x^2+y^2)^p}\, dx\, dy.$ **4162.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx\, dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$

4163. $\displaystyle\iint_{0\leq y\leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1+x^2+y^2)^p}\, dx\, dy.$

4164. $\displaystyle\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dx\, dy}{|x|^p+|y|^q}$ $(p>0, \quad q>0.)$

4165. $\displaystyle\iint_{x+y\geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\, dx\, dy.$

4166. Să se demonstreze că dacă funcţia continuă $f(x, y)$ este nenegativă şi $S_n\,(n=1, 2, \ldots)$ este un şir oarecare de domenii închise şi mărginite care epuizează domeniul S, atunci

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} f(x, y)\, dx\, dy,$$

unde membrul întîi are sau nu are sens, după cum limita din membrul al doilea există sau nu există.

4167. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{\substack{|x|\leqslant n\\ |y|\leqslant n}} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=\pi,$$

în timp ce

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2\pi n} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=0$$

(n fiind un număr natural).

4168. Să se arate că integrala

$$\int\limits_{x\geqslant 1,}\int\limits_{y\geqslant 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

este divergentă, deşi integralele iterate

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \quad \text{şi} \quad \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

sînt convergente.

Să calculeze integralele:

4169. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1,\\ x\geqslant 1}} \frac{dx\,dy}{x^p y^q}$.

4170. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1,\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} \frac{dx\,dy}{(x+y)^p}$.

4171. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

4172. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant 1} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$.

4173. $\displaystyle\iint\limits_{y\geqslant x^2+1} \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$.

4174. $\displaystyle\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y} e^{-(x+y)}\,dx\,dy$.

Trecînd la coordonate polare, să se calculeze integralele:

4175. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

4176. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

4177. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Să se calculeze integralele:

4178. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\,dx\,dy$,

unde $a<0$, $ac-b^2>0$.

4179. $\displaystyle\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy$.

4180. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+2\varepsilon\frac{x}{a}\frac{y}{b}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy \quad (0<|\varepsilon|<1)$.

Să se studieze convergenţa integralelor duble improprii ale funcţiilor discontinue de mai jos ($0<m\leqq|\varphi(x,y)|\leqq M$):

4181. $\displaystyle\iint\limits_{\Omega}\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$, unde domeniul Ω este definit prin condiţiile; $|y|\leqq x^2$; $x^2+y^2\leqq 1$.

4182. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dx\,dy$.

4183. $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q} \quad (p>0,\ q>0)$.

4184. $\displaystyle\int_0^a\int_0^a \frac{\varphi(x,y)}{|x-y|^p}\,dx\,dy$.

4185. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\,dx\,dy$.

4186. Să se demonstreze că dacă 1) funcţia $\varphi(x,y)$ este continuă în domeniul mărginit $a\leqq x\leqq A$, $b\leqq y\leqq B$; 2) funcţia $f(x)$ este continuă pe segmentul $a\leqq x\leqq A$ şi 3) $p<1$, integrala

$$\int_a^A dx\int_b^B \frac{\varphi(x,y)}{|f(x)-y|^p}\,dy$$

este convergentă.

Să se calculeze următoarele integrale:

4187. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy.$

4188. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a>0).$

4189. $\iint\limits_{\Omega} \ln \sin (x-y)\, dx\, dy,$

domeniul Ω fiind limitat de dreptele $y=0$, $y=x$, $x=\pi$.

4190. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x} \frac{dx\, dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Să se studieze convergenţa următoarelor integrale triple:

4191. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dx\, dy\, dz,$

unde $0<m\leqq|\varphi(x, y, z)|\leqq M$.

4192. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \frac{\varphi(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dx\, dy\, dz,$

unde $0<m\leqq|\varphi(x, y, z)|\leqq M$.

4193. $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx\, dy\, dz}{|x|^p+|y|^p+|z|^r} \quad (p>0,\ q>0,\ r>0).$

4194. $\int\limits_0^a\int\limits_0^a\int\limits_0^a \frac{f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\{[y-\varphi(x)]^2+[z-\psi(x)]^2\}^p},$

unde $0<m\leqq|f(x, y, z)|\leqq M$, iar $\varphi(x)$ şi $\psi(x)$ sînt funcţii continue pe segmentul $[0, a]$.

4195. $\iiint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1,\\ |y|\leqslant 1,\\ |z|\leqslant 1}} \frac{dx\, dy\, dz}{|x+y-z|^p}.$

Să se calculeze integralele:

4196. $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{dx\, dy\, dz}{x^p y^q z^r}.$

4197. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^3}.$

4198. $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqq 1} \frac{dx\, dy\, dz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}.$

4199. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, dx\, dy\, dz.$

4200. Să se calculeze integrala

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)}\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

unde $P(x_1, x_2, x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x$ $(a_{ij}=a_{ji})$ este o formă pozitiv definită.

§ 10. **Integrale multiple**

1°. Calculul direct al unei integrale multiple. Dacă funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este continuă în domeniul mărginit Ω, definit prin inegalităţile

$$\begin{cases} x_1' \leqq x_1 \leqq x_1'', \\ x_2'(x_1) \leqq x_2 \leqq x_2''(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq x_n''(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \end{cases}$$

unde x_1' şi x_1'' sînt constante, iar $x_2'(x_1)$, $x_2''(x_1), \ldots x_n'(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $x_n''(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ sînt funcţii continue, integrala multiplă respectivă poate fi calculată după formula

$$\iint\limits_{\Omega}\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int\limits_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \ldots \int\limits_{x_n(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{x_n''(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n.$$

2°. Schimbarea variabilelor într-o integrală multiplă. Dacă 1) funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este uniform continuă în domeniul mărginit şi carabil Ω; 2) funcţiile continuu derivabile

$$x_i=\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

reprezintă biunivoc domeniul Ω din spaţiul $Ox_1\, x_2 \ldots x_n$ pe domeniul mărginit Ω' din din spaţiul $O'\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n$, iar 3) jacobianul

$$J=\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)} \neq 0$$

în domeniul Ω', atunci este valabilă formula

$$\iint_{\Omega}\ldots\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n=$$

$$=\iint_{\Omega'}\ldots\int f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, |J|\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Trecînd în particular la coordonatele polare $(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$ după formulele

$$\begin{cases} x_1=r\cos\varphi_1, \\ x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \end{cases}$$

avem:

$$J=\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}.$$

4201. Fie $K(x, y)$ o funcţie continuă în domeniul $R\,(a\leq x\leq b;\ a\leq y\leq b)$ şi

$$K_n(x, y)=\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b K(x, t_1)\,K(t_1, t_2)\ldots K(t_n, y)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n.$$

Să se demonstreze că

$$K_{n+m}(x, y)=\int_a^b K_n(x, t)\, K_m(t, y)\, dt.$$

4202. Fie $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie continuă în domeniul $0\leq x_i\leq x\ (i=1, 2, \ldots, n)$. Să se demonstreze egalitatea

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1} dx_2\ldots\int_0^{x_{n-1}} f\,dx_n=\int_0^x dx_n\int_{x_n}^x dx_{n-1}\ldots\int_{x_2}^x f\,dx_1 \quad (n\geq 2).$$

4203. Să se demonstreze că

$$\int_0^t dt_1\int_0^{t_1} dt_2\ldots\int_0^{t_{n-1}} f(t_1)\,f(t_2)\ldots f(t_n)\,dt_n=\frac{1}{n!}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}^n,$$

f fiind o funcţie continuă.

Să se calculeze următoarele integrale multiple:

4204. a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\,dx_1 dx_2\ldots dx_n;$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$

4205. $\displaystyle I_n=\iint\limits_{\substack{x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0,\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leq a.}}\ldots\int dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$

4206. $\displaystyle\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1} dx_2\ldots\int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2\ldots x_n dx_n.$

4207. $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ \ldots\ x_n\geq 0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leq 1}}\ldots\int \sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$

4208. Să se calculeze volumul paralelipipedului n—dimensional mărginit de planele

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=\pm h_i \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

dacă $\Delta=|a_{ij}|\neq 0$.

4209. Să se calculeze volumul piramidei n—dimensionale

$$\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\ldots+\frac{x_n}{a_n}\leq 1,\ x_i\geq 0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

$$(a_i>0,\quad i=1, 2, \ldots, n).$$

4210. Să se calculeze volumul conului n — dimensional limitat de suprafeţele

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2},\ x_n=a_n.$$

4211. Să se calculeze volumul sferei n-dimensionale

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqq a^2.$$

4212. Să se calculeze $\int\int_{\Omega}\ldots\int x_n^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$, unde domeniul Ω este definit prin inegalităţile

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\leqq a^2,\quad -\frac{h}{2}\leqq x_n\leqq\frac{h}{2}.$$

4213. Să se calculeze

$$\int\int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<1}\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\ldots-x_n^2}}.$$

4214. Să se demonstreze egalitatea

$$\int_0^x dx_1\int_0^{x_1}dx_2\ldots\int_0^{x_{n-1}}f(x_n)\,dx_n=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du.$$

4215. Să se demonstreze egalitatea

$$\int_0^x x_1\,dx_1\int_0^{x_1}x_2dx_2\ldots\int_0^{x_{n-1}}x_n\,f(x_n)\,dx_n=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)\,du.$$

4216. Să se demonstreze *formula lui Dirichlet*

$$\int\int_{\substack{x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n\geqq0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqq1}}\cdot\int x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n+1)}\quad(p_1,\,p_2,\ldots,\,p_n>0).$$

4217. Să se demonstreze *formula lui Liouville*

$$\int\int\cdots\int_{\substack{x_1,\,x_2,\ldots,\,x_n\geqq0\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqq1}} f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\,x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\ldots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)}\int_0^1 f(u)\,u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}du\quad(p_1,\,p_2,\ldots,\,p_n>0),$$

unde $f(u)$ este o funcţie continuă, iar integrala din membrul al doilea este absolut convergentă.

I n d i c a ţ i e. Se va întrebuinţa metoda inducţiei complete.

4218. Să se reducă la o integrală simplă integrala multiplă de ordinul $n\,(n\geqq2)$

$$\int\int_{\Omega}\ldots\int f\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\right)dx_1\,dx_2\ldots dx_n,$$

extinsă domeniului $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqq R^2$, unde $f(u)$ este o funcţie continuă.

4219. Să se calculeze *autopotenţialul* sferei omogene de rază R avînd densitatea ρ_0, adică să se calculeze integrala

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\int\int\int\int\int\int_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqq R^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqq R^2}}\frac{dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}},$$

unde $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

4220. Să se calculeze integrala multiplă de ordinul n

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left\{\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i+c\right\}}dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

dacă $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\;(a_{ij}=a_{ji})$ este o formă pozitiv definită.

§ 11. Integrale curbilinii

1°. I n t e g r a l a c u r b i l i n i e d e s p e ţ a î n t î i. Dacă $f(x,\,y,\,z)$ este o funcţie definită şi continuă în punctele curbei netede C

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t),\quad(t_0\leqq t\leqq T),\tag{1}$$

iar ds este diferenţiala arcului, atunci

$$\int_C f(x,\,y,\,z)\,ds=\int_{t_0}^{T}f(x(t),\,y(t),\,z(t))\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

Specificul acestei integrale constă în aceea că ea nu depinde de sensul pe curba C.

2°. A p l i c a ţ i i l e m e c a n i c e a l e i n t e g r a l e i c u r b i l i n i i d e s p e ţ a î n t î i. Dacă $\rho=\rho(x,\,y,\,z)$ este densitatea liniară în punctul curent $(x,\,y,\,z)$ al curbei C, *masa curbei* C este:

$$M=\int_C\rho(x,\,y,\,z)\,ds.$$

Coordonatele centrului de greutate (x_0, y_0, z_0) al acestei curbe se exprimă prin formulele

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\rho(x, y, z)\,ds,\quad y_0=\frac{1}{M}\int_C y\rho(x, y, z)\,ds,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\int_C z\rho(x, y, z)\,ds.$$

3°. Integrala curbilinie de speţa a doua. Dacă funcţiile $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ sînt continue în punctele curbei (1) parcursă în sensul creşterii parametrului t, atunci

$$\int_C P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=\int_{t_0}^{T}\{P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t)+$$

$$+Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t)+R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\}\,dt. \qquad (2)$$

Modificînd sensul de parcurs pe curba C, această integrală îşi schimbă semnul. Din punct de vedere mecanic, integrala (2) reprezintă *lucrul mecanic al forţei variabile* $\{P, Q, R\}$, al cărei punct de aplicaţie descrie curba C.

4°. Cazul diferenţialei totale. Dacă

$$P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=du,$$

unde $u=u(x, y, z)$ este o funcţie uniformă în domeniul V, atunci, independent de forma curbei C situată în întregime în domeniul V, avem:

$$\int_C Pdx+Qdy+Rdz=u(x_2, y_2, z_2)-u(x_1, y_1, z_1),$$

unde (x_1, y_1, z_1) este punctul iniţial, iar (x_2, y_2, z_2) este punctul final al drumului. In cazul mai simplu, cînd domeniul V este simplu conex, iar funcţiile P, Q şi R au derivate parţiale de ordinul întîi continue, este necesar şi suficient pentru aceasta (pentru ca integrala de mai sus să nu depindă de drumul de integrare) ca în domeniul V să fie identic satisfăcute următoarele condiţii:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

In cazul acesta, funcţia u poate fi determinată din formula

$$u(x, y, z)=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz,$$

unde (x_0, y_0, z_0) este un punct oarecare fixat al domeniului V.

Din punct de vedere mecanic acest caz corespunde lucrului mecanic al unei forţe care derivă de la un potenţial.

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa întîi:

4221. $\int_C (x+y)\,ds$, unde C este conturul triunghiului cu vîrfurile $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ şi $B(0, 1)$.

4222. $\int_C y^2\,ds$, unde C este arcul cicloidei

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\qquad (0\leqq t\leqq 2\pi).$$

4223. $\int_C (x^2+y^2)\,ds$, C fiind curba

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t)\qquad (0\leqq t\leqq 2\pi).$$

4224. $\int_C xy\,ds$, C fiind arcul hiperbolei

$$x=a\,\mathrm{ch}\,t,\quad y=a\,\mathrm{sh}\,t\qquad (0\leqq t\leqq t_0).$$

4225. $\int_C \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)ds$, unde C este arcul astroidei $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$, unde C este un contur convex limitat de curbele $r=a$, $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ (r şi φ fiind coordonate polare).

4227. $\int_C |y|\,ds$, unde C este arcul lemniscatei

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

4228. $\int_C x\,ds$, unde C este porţiunea spiralei logaritmice $r=ae^{k\varphi}$ $(k>0)$, care se află în interiorul cercului $r=a$.

4229. $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, unde C este cercul $x^2+y^2=ax$.

4230. $\int_C \frac{ds}{y^2}$, unde C este lănţişorul $y=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$.

Să se calculeze lungimile arcelor curbelor strîmbe (parametrii luînd valori pozitive):

4231. $x=3t$, $y=3t^2$, $z=2t^3$, de la $O(0, 0, 0)$ la $A(3, 3, 2)$.

4232. $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$, $z=e^{-t}$, pentru $0<t<+\infty$.

4233. $y=a\arcsin\frac{x}{a}$, $z=\frac{a}{4}\ln\frac{a-x}{a+x}$ de la $O(0, 0, 0)$ la $A(x_0, y_0, z_0)$.

4234. $(x-y)^2=a(x+y)$, $x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2$ de la $O(0,\ 0,\ 0)$ la $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

4235. $x^2+y^2=cz$, $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\frac{z}{c}$ de la $O(0,\ 0,\ 0)$ la $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

4236. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ch}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=a$ de la punctul $A(a,\ 0,\ 0)$ la punctul $B(x,\ y,\ z)$.

Să se calculeze integralele curbilinii de speţa întîi, luate de-a lungul următoarelor curbe strîmbe:

4237. $\int\limits_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$, C fiind porţiunea elicei

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt \qquad (0\leqq t\leqq 2\pi).$$

4238. $\int\limits_C x^2 ds$, unde C este cercul

$$x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y+z=0.$$

4239. $\int\limits_C z\,ds$, unde C este elicea conică

$$x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t \qquad (0\leqq t\leqq t_0).$$

4240. $\int\limits_C z\,ds$, unde C este arcul curbei $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ luat între punctul $O(0,\ 0,\ 0)$ şi punctul $A(a,\ a,\ a\sqrt{2})$.

4241. Să se calculeze masa curbei $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$, ştiind că densitatea liniară a acesteia în punctul $(x,\ y)$ este $\rho=|y|$.

4242. Să se determine masa arcului curbei $x=at$, $y=\frac{a}{2}t^2$, $z=\frac{a}{3}t^3$ $(0\leqq t\leqq 1)$, a cărui densitate variază după legea $\rho=\sqrt{\frac{2y}{a}}$.

4243. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al arcului curbei omogene $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, luat între punctele $A(0,\ a)$ şi $B(b,\ h)$.

4244. Să se determine centrul de greutate al arcului de cicloidă

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t) \qquad (0\leqq t\leqq \pi).$$

4245. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al conturului alcătuit din triunghiul sferic $x^2+y^2+z^2=a^2$; $x>0$, $y>0$, $z>0$.

4246. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al arcului omogen

$$x=e^t\cos t,\quad y=e^t\sin t,\quad z=e^t \qquad (-\infty<t\leqq 0).$$

4247. Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate ale spirei de elice

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=\frac{h}{2\pi}t \qquad (0\leqq t\leqq 2\pi).$$

4248. Să se calculeze integrala curbilinie de speţa a doua

$$\int\limits_{OA} x\,dy-y\,dx,$$

unde O este originea coordonatelor şi punctul A are coordonatele $(1,\ 2)$, dacă: a) OA este un segment de dreaptă; b) OA este un segment de parabolă a cărei axă este Oy; c) OA este o linie poligonală formată din segmentul $\overline{OB}$ al axei Ox şi segmentul $\overline{BA}$ paralel cu axa Oy.

4249. Să se calculeze

$$\int\limits_{OA} x\,dy+y\,dx,$$

OA fiind drumurile a), b) şi c) din problema precedentă.

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de speţa a doua luate de-a lungul curbelor indicate, în sensul creşterii parametrului.

4250. $\int\limits_C (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$, unde C este parabola

$$y=x^2 \qquad (-1\leqq x\leqq 1).$$

4251. $\int\limits_C (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, unde C este curba

$$y=1-|1-x| \qquad (0\leqq x\leqq 2).$$

4252. $\oint\limits_C (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, unde C este elipsa $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, parcursă în sens invers sensului de mişcare al acelor unui ceasornic.

4253. $\int\limits_C (2a-y)\,dx+x\,dy$, unde C este arcul cicloidei

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t) \qquad (0\leqq t\leqq 2\pi).$$

4254. $\oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, unde C este cercul $x^2+y^2=a^2$ parcurs în sens invers sensului de mişcare al acelor unui ceasornic.

4255. $\oint\limits_{ABCDA} \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, unde $ABCDA$ este conturul pătratului cu vîrfurile $A(1,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(-1,\ 0)$, $D(0,\ -1)$.

4256. $\int\limits_{AB} dx \sin y + dy \sin x$, unde AB este segmentul de dreaptă determinat de punctele $A(0,\ \pi)$ şi $B(\pi,\ 0)$.

4257. $\oint\limits_{OmAnO} dy \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx$, unde OmA este segmentul parabolei $y=x^2$ şi OnA este segmentul dreptei $y=x$.

Constatînd în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferenţială totală, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

4258. $\int\limits_{(-1,\ 2)}^{(2,\ 3)} x\,dy+y\,dx.$ **4259.** $\int\limits_{(0,\ 1)}^{(3,\ -4)} x\,dx+y\,dy.$

4260. $\int\limits_{(0,\ 1)}^{(2,\ 3)} (x+y)\,dx+(x-y)\,dy.$

4261. $\int\limits_{(1,\ -1)}^{(1,\ 1)} (x-y)(dx-dy).$

4262. $\int\limits_{(0,\ 0)}^{(a,\ b)} f(x+y)\,(dx+dy)$, unde $f(u)$ este continuă.

4263. $\int\limits_{(2,\ 1)}^{(1,\ 2)} \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2}$ de-a lungul unui drum care nu intersectează axa Oy.

4264. $\int\limits_{(1,\ 0)}^{(6,\ 8)} \frac{x\,dx-y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ de-a lungul unui drum care nu trece prin originea coordonatelor.

4265. $\int\limits_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy$, unde φ şi ψ sînt funcţii continue.

4266. $\int\limits_{(-2,\ -1)}^{(3,\ 0)} (x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy.$

4267. $\int\limits_{(0,\ -1)}^{(1,\ 0)} \frac{x\,dy-y\,dx}{(x-y)^2}$ de-a lungul unor drumuri care nu intersectează dreapta $y=x$.

4268. $\int\limits_{(1,\ \pi)}^{(2,\ \pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$ de-a lungul unor drumuri care nu intersectează axa Oy.

4269. $\int\limits_{(0,\ 0)}^{(a,\ b)} e^x(\cos y\,dx-\sin y\,dy).$

4270. Să se demonstreze că dacă $f(u)$ este o funcţie continuă şi C este un contur închis, neted pe porţiuni, atunci

$$\oint\limits_C f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0.$$

Să se calculeze primitiva funcţiei z, dacă:

4271. $dz=(x^2+2xy-y^2)\,dx+(x^2-2xy-y^2)\,dy.$

4272. $dz=\frac{y\,dx-x\,dy}{3x^2-2xy+3y^2}.$

4273. $dz=\frac{(x^2+2xy+5y^2)\,dx+(x^2-2xy+y^2)\,dy}{(x+y)^3}.$

4274. $dz=e^x\,[e^y\,(x-y+2)+y]\,dx+e^x\,[e^y\,(x-y)+1]\,dy.$

4275. $dz=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m}\,dx+\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}}\,dy.$

4276. $dz=\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2}\partial y^{m-1}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dx-\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1}\partial y^{m+2}}\left(\ln\frac{1}{r}\right)dy$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

4277. Să se demonstreze că pentru integrala curbilinie de mai jos este valabilă evaluarea

$$\left|\int\limits_C P\,dx+Q\,dy\right|\leq LM,$$

unde L este lungimea drumului de integrare, iar $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$ pe arcul C.

4278. Să se evalueze integrala

$$I_R=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\frac{y\,dx-x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

Să se demonstreze că $\lim\limits_{R\to\infty} I_R=0$.

Să se calculeze integralele curbilinii luate de-a lungul curbelor strîmbe (se presupune că sistemul de coordonate este drept):

4279. $\int\limits_C (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$, unde C este curba $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ $(0\leq t\leq 1)$ parcursă în sensul creşterii parametrului.

4280. $\int\limits_C ydx+zdy+xdz$, unde C este spira elicei $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt\,(0\leq t\leq 2\pi)$, parcursă în direcţia creşterii parametrului.

4281. $\int\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$, unde C este cercul $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\operatorname{tg}\alpha\,(0<\alpha<\pi)$ parcurs în sens invers sensului de mişcare al acelor de ceasornic, dacă privim din spre partea pozitivă a axei Ox.

4282. $\int\limits_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$, unde C este porţiunea curbei Viviani $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax\,(z\geq 0,\ a>0)$, parcursă în sensul invers sensului de mişcare al acelor de ceasornic, dacă privim dinspre partea pozitivă a axei $Ox\,(x>a)$.

4283. $\int\limits_C (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz$, unde C este conturul care mărgineşte porţiunea sferei $x^2+y^2+z^2=1$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, parcurs în aşa fel încît faţa exterioară a acestei suprafeţe să rămînă la stînga.

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de diferenţiale totale:

4284. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} x\,dx+y^2dy-z^3dz.$

4285. $\int\limits_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\,dx+xz\,dy+xy\,dz.$

4286. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, unde punctul $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ este situat pe sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, iar punctul $(x_2,\ y_2,\ z_2)$, pe sfera $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(a>0,\ b>0)$.

4287. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy+\chi(z)\,dz$, unde φ, ψ, χ sînt funcţii continue.

4288. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(x+y+z)\,(dx+dy+dz)$, unde f este o funcţie continuă.

4289. $\int\limits_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\,dx+y\,dy+z\,dz)$, unde f este o funcţie continuă.

Să se determine primitiva funcţiei u, dacă:

4290. $du=(x^2-2yz)\ dx+(y^2-2xz)\,dy+(z^2-2xy)\,dz.$

4291. $du=\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)dx+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)dy-\frac{xy}{z^2}\,dz.$

4292. $du=\frac{(x+y-z)\,dx+(x+y-z)\,dy+(x+y+z)\,dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}.$

4293. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţa gravitaţională cînd punctul de masă m se deplasează din poziţia $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ în poziţia $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ (axa Oz este îndreptată vertical în sus).

4294. Să se calculeze lucrul mecanic al forţei elastice îndreptate spre originea coordonatelor, a cărei mărime este proporţională cu distanţa punctului material la originea coordonatelor dacă acest punct descrie, în sens invers sensului de mişcare al acelor de ceasornic, porţiunea de elipsă $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ din primul cadran.

4295. Să se calculeze lucrul mecanic al forţei gravitaţionale $F=\frac{k}{r^2}$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, care acţionează asupra masei unitate cînd aceasta din urmă se deplasează din punctul $M_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$ în punctul $M_2\,(x_2,\ y_2,\ z_2)$.

§ 12. Formula lui Green

1°. Legătura dintre integrala curbilinie și integrala dublă. Dacă C este un contur simplu, închis, neted pe porțiuni, mărginind un domeniu simplu conex S, parcurs în așa fel încît domeniul S să rămînă la stînga, și dacă funcțiile $P(x, y)$, $Q(x, y)$ sînt continue, împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul întîi, în domeniul S și pe frontiera lui, atunci este valabilă *formula lui Green*

$$\oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \qquad (1)$$

Formula (1) este valabilă și pentru un domeniu S finit, limitat de mai multe contururi simple, dacă prin frontiera C a acestui domeniu se înțelege suma tuturor contururilor frontieră parcurse în așa fel, încît domeniul S să rămînă la stînga.

2°. Aria unui domeniu plan. Aria lui S, mărginită de conturul simplu, neted pe porțiuni C, este egală cu

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x\,dy - y\,dx.$$

In acest paragraf se presupune, în afară de cazurile cînd se va face menționarea contrarie, că conturul de integrare închis este un contur simplu (fără puncte de intersecție), parcurs în așa fel încît domeniul mărginit de el, care nu conține punctul de la infinit, să rămînă la stînga (direcția pozitivă).

4296. Să se transforme cu ajutorul formulei lui Green integrala curbilinie

$$I = \oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\,[xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})]\,dy,$$

unde conturul C mărginește un domeniu finit S.

4297. Să se calculeze, aplicînd formula lui Green, integrala curbilinie

$$I = \oint_K (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)\,dy,$$

unde K este conturul triunghiului ABC cu vîrfurile $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(2, 5)$ parcurs în sens pozitiv.

Să se verifice rezultatul obținut, calculînd integrala direct.

Aplicînd formula lui Green, să se calculeze următoarele integrale curbilinii:

4298. $\oint_C xy^2 dy - x^2 y\,dx$, unde C este cercul $x^2+y^2=a^2$.

4299. $\oint_C (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$, unde C este elipsa

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4300. $\oint_C e^x [(1-\cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy]$, unde C este conturul, parcurs în sens pozitiv, care mărginește domeniul $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

4301. $\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy)$.

4302. Cu cît diferă între ele integralele curbilinii

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

și

$$I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy,$$

unde AmB este dreapta care unește punctele $A(1, 1)$ și $B(2, 6)$, iar AnB este parabola a cărei axă este verticală și care trece prin aceleași puncte A, B și prin originea coordonatelor?

4303. Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my)\,dx + (e^x \cos y - m)\,dy,$$

unde AmO este semicercul superior $x^2+y^2=ax$, parcurs de la punctul $A(a, 0)$ la punctul $O(0,0)$.

Indicație. Se va completa drumul AmO pînă la un contur închis prin segmentul OA al axei Ox.

4304. Să se calculeze integrala curbilinie

$$\int_{AmB} [\varphi(y)\,e^x - my]\,dx + [\varphi'(y)\,e^x - m]\,dy,$$

unde $\varphi(y)$ și $\varphi'(y)$ sînt funcții continue, iar AmB este un drum

oarecare care uneşte punctele $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$, dar care mărgineşte împreună cu segmentul $\overline{AB}$, aria $AmBA$ de mărime dată S.

4305. Să se determine funcţiile continue derivabile $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ în aşa fel, încît integrala curbilinie

$$I=\oint_C P(x+\alpha,\ y+\beta)\,dx+Q(x+\alpha,\ y+\beta)\,dy$$

să nu depindă de constantele α şi β, oricare ar fi conturul închis C.

4306. Ce condiţie trebuie să satisfacă funcţia derivabilă $F(x, y)$ pentru ca integrala curbilinie

$$\int_{AmB} F(x, y)(y\,dx+x\,dy)$$

să nu depindă de forma drumului de integrare?

4307. Să se calculeze

$$I=\oint_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$$

C fiind un contur simplu, închis care nu trece prin originea coordonatelor, parcurs în sens pozitiv.

Indicaţie. Se vor considera două cazuri: 1) originea coordonatelor se află în exteriorul conturului; 2) conturul C înconjură originea coordonatelor.

Să se calculeze cu ajutorul integralelor curbilinii ariile mărginite de următoarele curbe:

4308. Elipsa $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$.

4309. Astroida $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$ $(0\leqq t \leqq 2\pi)$.

4310. Parabola $(x+y)^2=ax$ $(a>0)$ şi axa Ox.

4311. Bucla foliului lui Descartes $x^3+y^3=3axy$ $(a>0)$.

Indicaţie. Se va pune $y=tx$.

4312. Lemniscata $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$

Indicaţie. Se va pune $y=x\operatorname{tg}\varphi$.

4313. Curba $x^3+y^3=x^2+y^2$ şi axele de coordonate.

4314. Să se calculeze aria limitată de curba

$$(x+y)^{n+m+1}=ax^n y^m=1 \quad (a>0,\ n>0,\ m>0).$$

4315. Să se calculeze aria limitată de curba

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1 \quad (a>0,\ b>0,\ n>0)$$

şi de axele de coordonate.

Indicaţie. Punem $\frac{x}{a}=\cos^{\frac{2}{n}}\varphi,\ \frac{y}{b}=\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$.

4316. Să se calculeze aria limitată de curba

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a>0,\ b>0,\ n>0)$ şi de axele de coordonate.

4317. Să se calculeze aria buclei curbei

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^n\cdot\left(\frac{y}{b}\right)^n$$

$$(a>0,\ b>0,\ c>0,\ n>0).$$

4318. Numim *epicicloidă* curba descrisă de un punct al unui cerc mobil de rază r care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix de rază R, rămînînd în exteriorul acestui cerc.

Să se calculeze aria mărginită de epicicloidă în ipoteza că raportul $\frac{R}{r}=n$ este un număr întreg $(n\geqq 1)$.

Să se discute cazul particular $r=R$ (cardioidă).

4319. Numim *hipocicloidă* curba descrisă de un punct al unui cerc mobil de rază r care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix de rază R, rămînînd în interiorul lui. Să se calculeze aria mărginită de hipocicloidă, presupunînd că raportul $\frac{R}{r}=n$ este un număr întreg $(n\geqq 2)$.

Să se considere cazul particular $r=\frac{R}{4}$ (astroidă).

4320. Să se calculeze aria suprafeţei cilindrice $x^2+y^2=ax$, decupată de suprafaţa $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4321. Să se calculeze

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{C}\frac{X\,dY-Y\,dX}{X^2+Y^2},$$

dacă $X=ax+by$, $Y=cx+dy$, iar conturul simplu închis C înconjură originea coordonatelor $(ad-bc\neq 0)$.

4322. Să se calculeze integrala I (v. problema precedentă), dacă $X=\varphi(x, y)$, $Y=\psi(x, y)$ şi conturul simplu C înconjură originea coordonatelor, iar curbele $\varphi(x, y)=0$ şi $\psi(x, y)=0$ au cîteva puncte de intersecţie simple în interiorul conturului C.

4323. Să se arate că dacă C este un contur închis şi l este o direcţie oarecare, atunci

$$\oint\limits_{C}\cos(\vec{l}, \vec{n})\,ds=0,$$

$\vec{n}$ fiind normala exterioară la conturul C.

4324. Să se calculeze valoarea integralei

$$I=\oint\limits_{C}[x\cos(\vec{n}, x)+y\cos(\vec{n}, y)]\,ds,$$

unde C este o curbă închisă simplă care limitează domeniul finit S, iar $\vec{n}$ este normala sa exterioară.

4325. Să se calculeze

$$\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{S}\oint\limits_{C}(\vec{F}\cdot\vec{n})\,ds,$$

unde S este aria mărginită de conturul C, care înconjură punctul (x_0, y_0), $d(S)$ este diametrul domeniului S, $\vec{n}$ este versorul normalei exterioare la conturul C şi $\vec{F}\{X, Y\}$ este o funcţie vectorială continuu derivabilă în $S+C$.

§ 13. Aplicaţiile fizice ale integralelor curbilinii

4326. Cu ce forţă atrage masa M, uniform distribuită pe semicercul superior $x^2+y^2=a^2$, $y\geq 0$, punctul material de masă m situat în originea coordonatelor?

4327. Să se calculeze *potenţialul logaritmic de simplu strat*

$$u(x, y)=\oint\limits_{C}x\ln\frac{1}{r}\,ds,$$

unde $x=\text{const}$ este densitatea, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$, iar conturul C este cercul $\xi^2+\eta^2=R^2$.

4328. Să se calculeze, introducînd coordonatele polare ρ şi φ, potenţialele logaritmice de simplu strat

$$I_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\ln\frac{1}{r}\,d\psi \quad \text{şi} \quad I_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\ln\frac{1}{r}\,d\psi,$$

unde r este distanţa între punctul (ρ, φ) şi punctul curent $(1, \psi)$, iar m este un număr natural.

4329. Să se calculeze *integrala lui Gauss*

$$u(x, y)=\oint\limits_{C}\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r}\,ds,$$

unde $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ este lungimea vectorului $\vec{r}$ care uneşte punctul $A(x, y)$ cu punctul curent $M(\xi, \eta)$ de pe conturul închis simplu neted pe porţiuni C, $(\vec{r}, \vec{n})$ este unghiul între vectorul $\vec{r}$ şi normala exterioară $\vec{n}$ la curba C în punctul M al acestei curbe.

4330. Să se calculeze, introducînd coordonatele polare ρ şi φ, potenţialele logaritmice de dublu strat

$$K_1=\int_0^{2\pi}\cos m\psi\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r}\,d\psi \quad \text{şi} \quad K_2=\int_0^{2\pi}\sin m\psi\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r}\,d\psi,$$

unde r este distanţa dintre punctul $A(\rho, \varphi)$ şi punctul curent $M(1, \psi)$, $(\vec{r}, \vec{n})$ este unghiul dintre direcţia $\overrightarrow{AM}=\vec{r}$ şi raza $\overrightarrow{OM}=\vec{n}$, dusă din punctul $O(0, 0)$, iar m este un număr natural.

4331. Numim o funcţie de două ori derivabilă $u=u(x, y)$ *armonică*, dacă $\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Să se demonstreze că u este o funcţie armonică dacă şi numai dacă

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\, ds=0,$$

C fiind un contur închis oarecare şi $\frac{\partial u}{\partial n}$ derivata după normala exterioară la acest contur.

4332. Să se demonstrează că

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy=-\iint_S u\, \Delta u\, dx\, dy+\oint_C u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds,$$

unde conturul neted C limitează domeniul finit S.

4333. Să se demonstreze că o funcţie armonică în interiorul unui domeniu finit S şi pe frontiera C a acestui domeniu este unic determinată de valorile sale de pe conturul C (v. problema 4332).

4334. Să se demonstreze *a doua formulă a lui Green* din plan

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy=\oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

C fiind un contur neted care limitează domeniul finit S, iar $\frac{\partial}{\partial n}$ este derivata după direcţia normalei exterioare la C.

4335. Să se demonstreze, folosind a doua formulă a lui Green, că dacă $u=u(x, y)$ este o funcţie armonică în domeniul închis şi finit S, atunci

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C \left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln \vec{r}\, \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

unde C este frontiera domeniului S, $\vec{n}$ direcţia normalei exterioare la conturul C, (x, y) un punct interior al domeniului S şi $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ este distanţa dintre punctul (x, y) şi punctul curent (ξ, η) al conturului C.

Indicaţie. Vom izola punctul (x, y) din domeniul S împreună cu o vecinătate circulară infinit mică şi vom aplica a doua formulă a lui Green părţii rămase din domeniul S.

4336. Să se demonstreze *teorema mediei* pentru funcţia armonică $u(M)=u(x, y)$:

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_C u(\xi, \eta)\, ds,$$

C fiind un cerc cu centrul în M.

4337. Să se demonstreze că o funcţie $u(x, y)$, armonică într-un domeniu mărginit şi închis, care nu este constantă în acest domeniu, nu-şi poate atinge valoarea maximă sau valoarea minimă într-un punct interior acestui domeniu (*principiul maximului*).

4338. Să se demonstreze *formula lui Riemann*

$$\iint_S \begin{vmatrix} L[u] & M[v] \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy=\oint_C P\, dx+Q\, dy,$$

unde

$$L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu,$$

$$M[v]=\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}-a\frac{\partial v}{\partial x}-b\frac{\partial v}{\partial y}+cv$$

(a, b, c fiind constante), P şi Q nişte funcţii determinate, iar conturul C limitează domeniul finit S.

4339. Fie $u=u(x, y)$ şi $v=v(x, y)$ componentele vitezei unui flux staţionar de lichid. Să se determine cantitatea de lichid care se scurge în unitatea de timp din domeniul S, mărginit de conturul C (adică diferenţa dintre cantităţile de lichid care intră şi care ies). Ce ecuaţie verifică funcţiile u şi v dacă lichidul este incompresibil şi dacă în domeniul S nu există izvoare nici puţuri?

4340. Conform legii lui Biot-Savart, curentul electric i care trece prin elementul unui conductor $\vec{ds}$ creează într-un punct al spaţiului $M(x, y, z)$ un cîmp magnetic de intensitate

$$d\vec{H}=ki\frac{(\vec{r}\times\vec{ds})}{r^3},$$

unde $\vec{r}$ este vectorul care uneşte elementul $\vec{ds}$ cu punctul M, iar k este un coeficient de proporţionalitate.

Să se afle proiecţiile H_x, H_y, H_z ale intensităţii cîmpului magnetic $\vec{H}$ în punctul M, pentru cazul unui conductor închis C.

§ 14. Integrale de suprafaţă

1°. Integrala de suprafaţă de speţa întîi. Dacă S este o suprafaţă cu două feţe netedă pe porţiuni

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \qquad ((u, v)\in\Omega) \tag{1}$$

şi $f(x, y, z)$ este o funcţie definită şi continuă în punctele suprafeţei S, atunci

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS=\iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv, \tag{2}$$

unde

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

In cazul particular, cînd ecuaţia suprafeţei S are forma

$$z=z(x, y) \quad ((x, y)\in\sigma),$$

unde $z(x, y)$ este o funcţie uniformă, continuu derivabilă, atunci

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS=\iint_\sigma f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Această integrală nu depinde de alegerea feţei suprafeţei S.

Dacă considerăm funcţia $f(x, y, z)$ ca fiind densitatea suprafeţei S în punctul (x, y, z), atunci integrala (2) reprezintă masa acestei suprafeţe.

2°. Integrala de suprafaţă de speţa a doua. Dacă S este o suprafaţă netedă cu două feţe, S^+ este faţa ei caracterizată de direcţia normalei $\vec{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ sînt trei funcţii definite şi continue pe suprafaţa S, atunci

$$\iint_{S^+} P\, dy\, dz+Q\, dx\, dz+R\, dx\, dy=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\, dS. \tag{3}$$

Dacă suprafaţa S este dată sub forma parametrică (1), cosinuşii directori ai normalei $\vec{n}$ sînt daţi de formulele

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

unde

$$A=\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \qquad B=\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \qquad C=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

iar semnul înaintea radicalului se alege în mod convenabil.

Dacă trecem la cealaltă faţă S^- a suprafeţei S, integrala (3) îşi schimbă semnul.

4341. Cu cît diferă între ele integralele de suprafaţă

$$I_1=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\, dS$$

şi

$$I_2=\iint_P (x^2+y^2+z^2)\, dP,$$

unde S este suprafaţa sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$, iar P este suprafaţa octaedrului $|x|+|y|+|z|=a$, înscris în această sferă?

4342. Să se calculeze

$$\iint_S z\, dS,$$

S fiind porţiunea suprafeţei $x^2+z^2=2az$ $(a>0)$ decupată de suprafaţa $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa întîi.

R **4343.** $\iint_S (x+y+z)\, dS$, unde S este suprafaţa

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad z\geqq 0.$$

4344. $\iint_S (x^2+y^2)\, dS$, S fiind frontiera corpului

$$\sqrt{x^2+y^2}\leqq z\leqq 1.$$

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, S fiind frontiera tetraedrului

$$x+y+z\leqq 1, \quad x\geqq 0, \quad y\geqq 0, \quad z\geqq 0.$$

4346. $\iint_S |xyz|\, dS$, unde S este partea suprafeţei $z=x^2+y^2$, decupată de planul $z=1$.

4347. $\iint\limits_S \frac{dS}{\rho}$, unde S este suprafaţa unui elipsoid, iar ρ este distanţa centrului elipsoidului la planul tangent elementului dS al suprafeţei elipsoidului.

4348. $\iint\limits_S z\,dS$, S fiind o porţiune de pe suprafaţa elicoidului

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=v\quad (0<u<a;\quad 0<v<2\pi).$$

4349. $\iint\limits_S z^2\,dS$, unde S este o porţiune de pe suprafaţa conului

$$x=r\cos\varphi\sin\alpha,\quad y=r\sin\varphi\sin\alpha,\quad z=r\cos\alpha$$

$(0\leqq r\leqq a;\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi)$ şi α este o constantă $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

4350. $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$, S fiind porţiunea suprafeţei conice $z=\sqrt{x^2+y^2}$, decupată de suprafaţa

$$x^2+y^2=2ax.$$

4351. Să se demonstreze *formula lui Poisson*

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,dS=2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du,$$

S fiind suprafaţa sferei $x^2+y^2+z^2=1$.

4352. Să se calculeze masa pînzei parabolice

$$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\quad (0\leqq z\leqq 1),$$

a cărei densitate variază după legea $\rho=z$.

4353. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Oz al pînzei sferice omogene

$$x^2+y^2+z^2=a^2\qquad (z\geqq 0)$$

de densitate ρ_0.

4354. Să se calculeze momentul de inerţie al pînzei conice omogene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=0\qquad (0\leqq z\leqq b)$$

de densitate ρ_0, în raport cu dreapta

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}.$$

4355. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al porţiunii de pe suprafaţa omogenă

$$z=\sqrt{x^2+y^2},$$

decupată de suprafaţa $x^2+y^2=ax$.

4356. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeţei omogene

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\qquad (x\geqq 0;\ y\geqq 0;\ x+y\leqq a).$$

4357. Cu ce forţă atrage suprafaţa conică trunchiată, omogenă, de densitate ρ_0

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=r\qquad (0\leqq\varphi\leqq 2\pi,\ 0<b\leqq r\leqq a)$$

punctul material de masă m, situat în vîrful acestei suprafeţe?

4358. Să se calculeze potenţialul sferei omogene $x^2+y^2+z^2=a^2$ (S), de densitate ρ_0, în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, adică să se calculeze integrala

$$u=\iint\limits_S \frac{\rho_0\,dS}{r},$$

unde $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

4359. Să se calculeze

$$F(t)=\iint\limits_{x+y+z=t} f(x, y, z)\,dS,$$

unde

$$f(x, y, z)=\begin{cases} 1-x^2-y^2-z^2, & \text{dacă } x^2+y^2+z^2\leqq 1;\\ 0\quad, & \text{dacă } x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

Să se construiască graficul funcţiei $u=F(t)$.

4360. Să se calculeze integrala

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z)\,dS,$$

unde

$$f(x, y, z)=\begin{cases} x^2+y^2, & \text{dacă } z\geq\sqrt{x^2+y^2}; \\ 0\ , & \text{dacă } z<\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

4361. Să se calculeze integrala

$$F(x, y, z, t)=\iint_S f(\xi, \eta, \zeta)\,dS,$$

unde S este o sferă variabilă

$$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2,$$

şi

$$f(\xi, \eta, \zeta)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } \xi^2+\eta^2+\zeta^2<a^2; \\ 0, & \text{dacă } \xi^2+\eta^2+\zeta^2\geq a^2, \end{cases}$$

n ipoteza că

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}>a>0.$$

Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de speţa a doua:

4362. $\iint_S (x\,dy\,dz+y\,dx\,dz+z\,dx\,dy)$, S fiind faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4363. $\iint_S f(x)\,dy\,dz+g(y)\,dx\,dz+h(z)\,dx\,dy$, unde $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ sînt funcţii continue, iar S este faţa exterioară a suprafeţei paralelipipedului $0<x<a$; $0<y<b$; $0<z<c$.

4364. $\iint_S (y-z)\,dy\,dz+(z-x)\,dx\,dz+(x-y)\,dx\,dy$, S fiind faţa exterioară a conului $x^2+y^2=z^2$ $(0\leq z\leq h)$.

4365. $\iint_S \left(\frac{dy\,dz}{x}+\frac{dx\,dz}{y}+\frac{dx\,dy}{z}\right)$, S fiind faţa exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4366. $\iint_S x^2\,dy\,dz+y^2\,dx\,dz+z^2\,dx\,dy$, S fiind faţa exterioară a sferei $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

§ 15. Formula lui Stokes

Dacă $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$, $R=R(x, y, z)$ sînt funcţii continuu derivabile şi C este un contur simplu închis, neted pe porţiuni, mărginind suprafaţa finită cu două feţe S netedă pe porţiuni, atunci este valabilă *formula lui Stokes*

$$\oint_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

unde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, sînt cosinuşii directori ai normalei la suprafaţa S, orientată astfel, încît în raport cu ea conturul să fie parcurs în sens invers sensului de mişcare al acelor de ceasornic (pentru un sistem de coordonate drept).

4367. Să se calculeze, aplicînd formula lui Stokes, integrala curbilinie

$$\oint_C y\,dx+z\,dy+x\,dz,$$

unde C este cercul $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$, parcurs în sens invers sensului de mişcare al acelor de ceasornic, dacă privim din partea pozitivă a axei Ox.

Să se verifice rezultatul prin calcul direct.

4368. Să se calculeze integrala

$$\int_{AmB} (x^2-yz)\,dx+(y^2-xz)\,dy+(z^2-xy)\,dz,$$

de-a lungul arcului de elice

$$x=a\cos\varphi, \quad y=a\sin\varphi, \quad z=\frac{h}{2\pi}\varphi$$

între punctul $A(a, 0, 0)$ şi punctul $B(a, 0, h)$.

I n d i c a ţ i e. Se va completa curba AmB printr-un segment rectiliniu şi se va aplica formula lui Stokes.

4369. Fie C un contur închis situat în planul $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sînt cosinuşii directori ai normalei la plan), care limitează o suprafaţă S.

Să se calculeze

$$\oint\limits_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

conturul C fiind parcurs în sens pozitiv.

Să se calculeze, aplicînd formula lui Stokes, integralele:

4370. $\oint\limits_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz,$

unde C este elipsa $x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$ $(0\leq t\leq\pi)$, parcursă în sensul în care creşte parametrul t.

4371. $\oint\limits_C (y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz,$

unde C este elipsa $x^2+y^2=a^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ $(a>0,\ h>0)$, parcursă în sens invers sensului de mişcare al acelor de ceasornic, dacă privim dinspre partea pozitivă a axei Ox.

4372. $\oint\limits_C (y^2+z^2)\,dx+(x^2+z^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz,$

unde C este curba $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx$ $(0<r<R,\ z>0)$, parcursă astfel încît domeniul mai mic limitat de ea de pe faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=2Rx$ să rămînă la stînga.

4373. $\oint\limits_C (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy+(x^2-y^2)\,dz,$

unde C este secţiunea cubului $0<x<a$, $0<y<a$, $0<z<a$ cu planul $x+y+z=\frac{3}{2}a$, parcursă în sensul invers sensului de mişcare al acelor de ceasornic, dacă privim din partea pozitivă a axei Ox

4374. $\oint\limits_C y^2z^2dx+x^2z^2dy+x^2y^2dz,$

unde C este curba închisă $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$, parcursă în sensul creşterii parametrului t.

4375. Să se demonstreze că funcţia

$$W(x,y,z)=ki\iint\limits_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,dS \qquad (k=\text{const}),$$

S fiind elementul de suprafaţă limitat de conturul C, $\vec{n}$ normala la suprafaţa S, iar $\vec{r}$ raza vectoare, care uneşte punctul $M,(x,y,z)$ al spaţiului cu punctul curent $A(\xi,\eta,\zeta)$ al conturului C, este potenţialul cîmpului magnetic $\vec{H}$, generat de curentul i care trece prin conturul C (v. problema 4340).

§ 16. Formula lui Ostrogradski

Dacă S este o suprafaţă netedă pe porţiuni care limitează volumul V, iar $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ sînt funcţii continue împreună cu derivatele lor de ordinul întîi în domeniul $V+S$, atunci este valabilă *formula lui Ostrogradski*

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz,$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ fiind cosinuşii directori ai normalei exterioare la suprafaţa S.

Să se transforme, aplicînd formula lui Ostrogradski, următoarele integrale de suprafaţă, dacă suprafaţa netedă S mărgineşte un volum finit V, iar $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sînt cosinuşii directori ai normalei exterioare la suprafaţa S:

4376. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz+y^3\,dx\,dz+z^3\,dx\,dy.$

4377. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy+xz\,dx\,dz+yz\,dy\,dz.$

4378. $\iint\limits_S \frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS.$

4379. $\iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)dS.$

4380. $\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\right.$

$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS.$

4381. Să se demonstreze că dacă S este o suprafaţă simplă închisă, iar $\vec{l}$ este o direcţie constantă oarecare, atunci

$$\iint_S \cos(\vec{n}, \vec{l})\, dS = 0,$$

unde $\vec{n}$ este normala exterioară la suprafaţa S.

4382. Să se demonstreze că volumul corpului mărginit de suprafaţa S este

$$V = \frac{1}{3}\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, dS,$$

unde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sînt cosinuşii directori ai normalei exterioare la suprafaţa S.

4383. Să se demonstreze că volumul conului mărginit de suprafaţa conică netedă $F(x, y, z)=0$ şi de planul $Ax+By+Cz+D=0$ este egal cu

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

unde S este aria bazei conului situată în planul dat, iar H este înălţimea lui.

4384. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafaţa

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v + b\sin u\sin v,\\ y &= a_1\cos u\sin v + b_1\sin u\cos v,\\ z &= c\sin u. \end{aligned}\right\}$$

4385. Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafaţa

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = u - a\cos v \qquad (u>0)$$

şi de planele $x=0$, $x=a$ $\quad (a>0)$.

4386. Să se demonstreze formula

$$\frac{d}{dt}\left\{\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\right\} =$$

$$= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t)\, dS + \iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2} \frac{\partial f}{\partial t}\, dx\, dy\, dz \quad (t>0).$$

Să se calculeze, cu ajutorul formulei lui Ostrogradski, următoarele integrale de suprafaţă:

4387. $\iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dx\, dz + z^2\, dx\, dy,$

unde S este faţa exterioară a frontierei cubului $0<x<a$, $0<y<a$, $0<z<a$.

4388. $\iint_S x^3\, dy\, dz + y^3\, dx\, dz + z^3\, dx\, dy,$

unde S este faţa exterioară a sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$.

4389. $\iint_S (x-y+z)\, dy\, dz + (y-z+x)\, dz\, dx + (z-x+y)\, dx\, dy,$

unde S este faţa exterioară a suprafeţei

$$|x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| = 1.$$

4390. Să se calculeze

$$\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, dS,$$

unde S este porţiunea suprafeţei conice $x^2+y^2=z^2$ $(0\le z\le h)$, iar $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sînt cosinuşii directori ai normalei exterioare la această suprafaţă.

Indicaţie. Se va adăuga porţiunea planului

$$z=h, \quad x^2+y^2\le h^2.$$

4391. Să se demonstreze formula

$$\iiint_V \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n})\, dS,$$

unde S este o suprafaţă închisă care mărgineşte volumul V, $\vec{n}$ este normala exterioară la suprafaţa S în punctul curent al ei (ξ, η, ζ), $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, iar $\vec{r}$ este raza vectoare care uneşte punctul (x, y, z) cu punctul (ξ, η, ζ).

4392. Să se calculeze *integrala lui Gauss*

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}\, dS,$$

unde S este suprafaţa simplă închisă şi netedă, mărginind volumul V, $\vec{n}$ este normala exterioară la suprafaţa S într-un punct al ei (ξ, η, ζ), $\vec{r}$ este raza vectoare care uneşte punctul (x, y, z) cu punctul (ξ, η, ζ), iar $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$.

Se vor deosebi două cazuri:

a) cazul cînd suprafaţa S nu înconjură punctul (x, y, z);

b) cazul cînd suprafaţa S înconjură acest punct.

4393. Să se demonstreze că dacă

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

şi S este o suprafaţă netedă care limitează volumul finit V, atunci sînt valabile următoarele formule:

$$\text{a)}\quad \iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS=\iiint_V \Delta u\, dx\, dy\, dz;$$

$$\text{b)}\quad \iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\, dS=\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz+\iiint_V u\,\Delta u\, dx\, dy\, dz,$$

u fiind o funcţie continuă împreună cu derivatele sale parţiale de ordinul al doilea inclusiv în domeniul $V+S$, iar $\frac{\partial u}{\partial n}$ este derivata după normala exterioară la suprafaţa S.

4394. Să se demonstreze *a doua formulă a lui Green* în spaţiu

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx\, dy\, dz=\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

unde volumul V este mărginit de suprafaţa S, $\vec{n}$ este direcţia normalei exterioare la suprafaţa S şi $u=u(x, y, z)$, $v=v(x, y, z)$ sînt funcţii de două ori derivabile în domeniul $V+S$.

4395. Vom spune că funcţia $u=u(x, y, z)$, avînd într-un anumit domeniu derivate parţiale continue pînă la ordinul al doilea inclusiv, este *armonică* în acest domeniu dacă

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Să se demonstreze că dacă u este o funcţie armonică în domeniul finit şi închis V, mărginit de suprafaţa netedă S, atunci sînt valabile formulele:

$$\text{a)}\quad \iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS=0;$$

$$\text{b)}\quad \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz=\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\, dS,$$

unde $\vec{n}$ este normala exterioară la suprafaţa S.

Să se demonstreze folosind formula b) că o funcţie armonică în domeniul V este unic determinată de valorile sale de pe frontiera S.

4396. Să se demonstreze că dacă funcţia $u=u(x, y, z)$ este armonică în domeniul finit şi închis V, mărginit de suprafaţa netedă S, atunci

$$u(x, y, z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S \left[u\,\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial n}\right] dS,$$

unde $\vec{r}$ este raza vectoare cu originea în punctul (x, y, z) al domeniului V şi extremitatea în punctul (ξ, η, ζ) al suprafeţei S, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, iar $\vec{n}$ este vectorul normalei exterioare la suprafaţa S în punctul (ξ, η, ζ).

4397. Să se demonstreze că dacă $u=u(x, y, z)$ este o funcţie armonică în interiorul sferei S de rază R cu centrul în punctul (x_0, y_0, z_0), atunci

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(x, y, z)\, dS$$

(teorema mediei).

4398. Să se demonstreze că funcţia $u=u(x, y, z)$, continuă în domeniul mărginit şi închis V şi armonică în interiorul acestui domeniu, nu-şi poate atinge valoarea maximă sau minimă într-un punct interior acestui domeniu dacă această funcţie nu se reduce la o constantă *(principiul maximului).*

4399. Un corp V este cufundat în întregime într-un lichid. Să se demonstreze, plecînd de la legea lui Pascal, că forţa u pe care o exercită lichidul asupra corpului de jos în sus este egală cu greutatea volumului de lichid deslocuit şi este orientată vertical în sus *(legea lui Arhimede).*

4400. Fie S_t o sferă variabilă $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2=t^2$, iar $f(\xi, \eta, \zeta)$ o funcţie continuă. Să se demonstreze că funcţia

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t}\frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t}\,dS_t$$

verifică *ecuaţia undelor*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

şi condiţiile iniţiale:

$$u\Big|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(x, y, z).$$

Indicaţie. Se va exprima $\frac{\partial u}{\partial t}$ printr-o integrală triplă.

§ 17. Elemente de teoria cîmpurilor

1°. Gradient. Dacă $u(\vec{r})=u(x, y, z)$, unde $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, este un cîmp scalar continuu derivabil, numim *gradient* al acestui cîmp, vectorul

$$\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

sau, prescurtat, $\operatorname{grad} u=\nabla u$, unde $\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$. Gradientul cîmpului u în punctul dat (x, y, z) este orientat după direcţia normalei la suprafaţa de nivel $u(x, y, z)=C$, care trece prin acest punct. Acest vector dă pentru fiecare punct al cîmpului viteza maximă de variaţie a funcţiei u în mărime

$$|\operatorname{grad} u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

direcţie şi sens.

Derivata cîmpului u după o direcţie oarecare $\vec{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ este:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\operatorname{grad} u\cdot\vec{l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2°. Divergenţa şi rotorul unui cîmp. Dacă

$$\vec{a}(\vec{r})=a_x(x, y, z)\,\vec{i}+a_y(x, y, z)\,\vec{j}+a_z(x, y, z)\,\vec{k}$$

este un *cîmp vectorial* continuu derivabil, scalarul

$$\operatorname{div}\vec{a}=\nabla\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

se numeşte *divergenţa* acestui cîmp.

Vectorul

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\nabla\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}$$

se numeşte *rotorul cîmpului*.

3°. Fluxul unui vector printr-o suprafaţă. Să presupunem că vectorul $\vec{a}(\vec{r})$ generează în domeniul Ω un cîmp vectorial; numim atunci *fluxul vectorului printr-o suprafaţă dată* S, din Ω, în sensul indicat de versorul normalei $\vec{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, integrala

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}\,dS=\iint_S (a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\,dS.$$

Formula lui Ostrogradski devine în transcriere vectorială:

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}\,dS=\iiint_V \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz,$$

unde S este suprafaţa care mărgineşte volumul V, iar $\vec{n}$ este versorul normalei exterioare la suprafaţa S.

4°. Circulaţia unui vector. Numim *integrala liniară* a vectorului $\vec{a}(\vec{r})$, luată de-a lungul unei curbe C *(lucrul mecanic al cîmpului)*, numărul

$$\int_C \vec{a}\,d\vec{r}=\int_C a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz.$$

Dacă conturul C este închis, integrala liniară se numeşte *circulaţia* vectorului $\vec{a}$ de-a lungul conturului C.

Transcrisă vectorial, *formula lui Stokes* devine

$$\oint_C \vec{a}\,d\vec{r}=\iint_S \vec{n}\operatorname{rot}\vec{a}\,dS,$$

unde C este conturul închis care mărgineşte suprafaţa S, iar direcţia normalei $\vec{n}$ la suprafaţa S trebuie astfel luată încît, pentru un observator care s-ar afla pe suprafaţa S cu capul îndreptat după normală, sensul de parcurs al conturului C ar fi cel invers sensului de mişcare al acelor de ceasornic (pentru un sistem de coordonate drept).

5°. Cîmp potenţial. Dacă cîmpul vectorial $\vec{a}(\vec{r})$ este gradientul unei anumite funcţii scalare u:

$$\operatorname{grad} u = \vec{a},$$

el se numeşte cîmp *potenţial*, iar mărimea u se numeşte *potenţialul* cîmpului.

Dacă potenţialul u este o funcţie uniformă, atunci

$$\int_{AB} \vec{a}\, d\vec{r} = u(B) - u(A).$$

In particular, circulaţia vectorului $\vec{a}$ este în acest caz egală cu zero.

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un cîmp $\vec{a}$, definit într-un domeniu simplu conex, să fie un cîmp potenţial este ca să fie satisfăcută condiţia $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$, cu alte cuvinte un astfel de cîmp trebuie să fie irotaţional.

4401. Să se afle mărimea şi direcţia gradientului cîmpului $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ în punctele: a) $O(0, 0, 0)$; b) $A(1, 1, 1)$ şi c) $B(-2, 1, 1)$. In ce punct este gradientul egal cu zero?

4402. In ce puncte ale spaţiului $Oxyz$ este gradientul cîmpului

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

a) perpendicular pe axa Oz;
b) paralel cu axa Oz;
c) egal cu zero?

4403. Fie dat cîmpul scalar

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

unde $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. In ce puncte ale spaţiului $Oxyz$ are loc egalitatea

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

4404. Să se construiască suprafeţele de nivel ale cîmpului scalar

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}.$$

Să se determine suprafaţa de nivel care trece prin punctul $M(9, 12, 28)$. Care este valoarea lui $\max u$ în domeniul $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$?

4405. Să se determine unghiul φ dintre gradienţii cîmpului

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

în punctele $A(1, 2, 2)$ şi $B(-3, 1, 0)$.

4406. Fie cîmpul scalar

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Să se construiască suprafeţele de nivel şi suprafeţele pentru care gradientul cîmpului are acelaşi modul.

Să se determine $\inf u$, $\sup u$, $\inf |\operatorname{grad} u|$, $\sup |\operatorname{grad} u|$ în domeniul $1 < z < 2$.

4407. Să se determine cu aproximaţia unor infiniţi mici de ordin superior, distanţa în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ între suprafeţele de nivel infinit vecine

$$u(x, y, z) = c \quad \text{şi} \quad u(x, y, z) = c + \Delta c,$$

unde $u(y_0, x_0, z_0) = c$.

4408. Să se demonstreze formulele:
a) $\operatorname{grad}(u + c) = \operatorname{grad} u$ (c — constant);
b) $\operatorname{grad} cu = c \operatorname{grad} u$ (c — constant);
c) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$;
d) $\operatorname{grad} uv = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$;
e) $\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u$;
f) $\operatorname{grad} f'(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$.

4409. Să calculeze: a) $\operatorname{grad} r$; b) $\operatorname{grad} r^2$; c) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$, unde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4410. Să se calculeze $\operatorname{grad} f(r)$, unde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4411. Să se afle $\operatorname{grad}(\vec{c}\vec{r})$, unde $\vec{c}$ este un vector constant, iar $\vec{r}$ este vectorul de poziţie.

4412. Să se afle $\operatorname{grad}\{|\vec{c} \times \vec{r}|^2\}$ ($\vec{c}$ este un vector constant).

4413. Să se demonstreze formula

$$\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v.$$

4414. Să se demonstreze formula

$$\nabla^2 (uv)=u\nabla^2 v+v\nabla^2 u+2\nabla u\nabla v,$$

unde

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

$$\nabla^2=\nabla\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

4415. Să se demonstreze că dacă funcţia $u=u(x, y, z)$ este derivabilă în domeniul convex Ω şi $|\operatorname{grad} u|\leq M$, M fiind o constantă, atunci oricare ar fi perechea de puncte A, B din Ω, avem:

$$|u(A)-u(B)|\leq M\rho(A, B),$$

unde $\rho(A, B)$ este distanţa între punctele A şi B.

4416. Să se calculeze derivata cîmpului $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ într-un punct dat $M(x, y, z)$ după direcţia vectorului de poziţie $\vec{r}$ al acestui punct.

In ce caz este această derivată egală cu mărimea gradientului?

4417. Să se calculeze derivata cimpului $u=\frac{1}{r}$ după direcţia $\vec{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

In ce caz este această derivată egală cu zero?

4418. Să se calculeze derivata cîmpului $u=u(x, y, z)$ după direcţia gradientului cîmpului $v=v(x, y, z)$.

In ce caz este această derivată egală cu zero?

4419. Să se reporteze la triedrul $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ cîmpul vectorial

$$\vec{a}=\vec{c}\times\operatorname{grad} u,$$

dacă

$$u=\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{şi} \quad \vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}.$$

4420. Să se determine liniile de cîmp ale cîmpului vectorial

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k}.$$

4421. Să se demonstreze prin calcul direct că divergenţa vectorului $\vec{a}$ nu depinde de alegerea sistemului rectangular de coordonate.

4422. Să se demonstreze că

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint_S \vec{a}\vec{n}\,dS,$$

unde S este suprafaţa închisă care înconjură punctul M şi care închide volumul V, $\vec{n}$ este normala exterioară la suprafaţa S, iar $d(S)$ este diametrul suprafeţei S.

4423. Să se afle

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

4424. Să se demonstreze că

a) $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{div}\vec{a}+\operatorname{div}\vec{b}$; b) $\operatorname{div}(u\vec{c})=\vec{c}\operatorname{grad} u$

($\vec{c}$ fiind un vector constant, u un scalar).

c) $\operatorname{div}(u\vec{a})=u\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\operatorname{grad} u$.

4425. Să se calculeze $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

4426. Să se calculeze $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. In ce caz este $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]=0$?

4427. Să se calculeze: a) $\operatorname{div}\vec{r}$; b) $\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r}$.

4428. Să se calculeze $\operatorname{div}[f(r)\vec{c}]$, unde $\vec{c}$ este un vector constant.

4429. Să se calculeze $\operatorname{div}[f(r)\vec{r}]$. In ce caz este divergenţa acestui vector nulă?

4430. Să se calculeze: a) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad} u)$; b) $\operatorname{div}(u\operatorname{grad} v)$.

4431. Un solid se roteşte în jurul axei Oz, în sens invers sensului de mişcare al acelor de ceasornic, cu viteza unghiulară

constantă ω. Să se afle divergenţa vectorului viteză $\vec{v}$ şi a vectorului acceleraţie $\vec{w}$ în punctul $M(x, y, z)$ al spaţiului, la un moment dat.

4432. Să se calculeze divergenţa cîmpului gravitaţional generat de un sistem finit de centre de atracţie.

4433. Să se afle expresia divergenţei vectorului plan $\vec{a}=\vec{a}(\vec{r}, \varphi)$ în coordonate polare r şi φ.

4434. Să se exprime $\operatorname{div} \vec{a}(x, y, z)$ în coordonate rectangulare curbilinii u, v, w, dacă

$$x=f(u, v, w,)\quad y=g(u, v, w), \quad z=h(u, v, w).$$

Să se obţină ca un caz particular expresia lui $\operatorname{div} \vec{a}$ în coordonate cilindrice şi coordonate sferice.

Indicaţie. Se va considera fluxul vectorului $\vec{a}$ prin paralelipipedul infinit mic mărginit de suprafeţele $u=\text{const}$, $v=\text{const}$, $w=\text{const}$.

4435. Să se demonstreze că:

a) $\operatorname{rot}(\vec{a}+\vec{b})=\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{rot}\vec{b}$;

b) $\operatorname{rot}(u\vec{a})=u\operatorname{rot}\vec{a}+\operatorname{grad} u\times\vec{a}$.

4436. Să se calculeze: a) $\operatorname{rot}\vec{r}$; b) $\operatorname{rot}[f(r)\vec{r}]$.

4437. Să se calculeze: a) $\operatorname{rot}\vec{c}f(\vec{r})$; b) $\operatorname{rot}[\vec{c}\times f(r)\vec{r}]$ (unde $\vec{c}$ este un vector constant).

4438. Să se demonstreze că $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$.

4439. Să se calculeze: a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$; b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})$.

4440. Un corp se roteşte în jurul axei $\vec{l}\,\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ cu viteză unghiulară constantă ω. Să se calculeze rotorul vectorului viteză $\vec{v}$ în punctul spaţiului $M(x, y, z)$ la un moment dat.

4441. Să se afle fluxul vectorului $\vec{r}$: a) prin suprafaţa laterală a conului $x^2+y^2\leqq z^2\,(0\leqq z\leqq h$; b) prin baza acestui con.

4442. Să se calculeze fluxul vectorului $\vec{a}=\vec{i}yz+\vec{j}xz+\vec{k}xy$: a) prin suprafaţa laterală a cilindrului $x^2+y^2\leqq a^2\,(0\leqq z\leqq h)$; b) prin suprafaţa totală a acestui cilindru.

4443. Să se calculeze fluxul vectorului de poziţie $\vec{r}$ prin suprafaţa

$$z=1-\sqrt{x^2+y^2}\quad (0\leqq z\leqq 1).$$

4444. Să se calculeze fluxul vectorului $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ prin octantul pozitiv al sferei $x^2+y^2+z^2=1$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$.

4445. Să se calculeze fluxul vectorului $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$, prin suprafaţa totală a piramidei limitată de planele $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=a$ $(a>0)$.

Să se verifice rezultatul, aplicînd formula lui Ostrogradski.

4446. Să se demonstreze că fluxul vectorului $\vec{a}$ prin suprafaţa S, dată de ecuaţia $\vec{r}=\vec{r}(u, v)$ $((u, v)\in\Omega)$ este egal cu

$$\iint_S \vec{a}\vec{n}\,dS=\iint_\Omega\left(\vec{a}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right)du\,dv,$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafaţa S.

4447. Să se calculeze fluxul vectorului $\vec{a}=m\frac{\vec{r}}{r^3}$ (unde m este o constantă), prin suprafaţa închisă S care înconjură originea coordonatelor.

4448. Să se calculeze fluxul vectorului

$$a(\vec{r})=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}\left(-\frac{e_i}{4\pi r_i}\right),$$

prin suprafaţa închisă S care înconjură punctele $M_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$, unde e_i sînt constante, iar r_i sînt distanţele punctului M_i (*izvoarele*) la punctul curent $M(\vec{r})$.

4449. Să se demonstreze că

$$\iint_S\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint_V\nabla^2 u\,dx\,dy\,dz,$$

unde suprafaţa S închide corpul V.

4450. Cantitatea de căldură care trece în unitatea de timp prin elementul de suprafaţă dS, aflat în cîmpul temperaturilor u, este egală cu

$$dQ = -k\vec{n}\,\text{grad}\,u\,dS,$$

unde k este coeficientul de conductibilitate termică interioară, iar $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafaţa S. Să se determine cantitatea de căldură acumulată de corpul V în unitatea de timp. Folosind viteza de creştere a temperaturii, să se deducă ecuaţia pe care o satisface temperatura corpului *(ecuaţia căldurii)*.

4451. Un lichid incompresibil în mişcare umple volumul V. Presupunînd că în volumul V nu există nici izvoare, nici puţuri, să se deducă *ecuaţia continuităţii*

$$\frac{d\rho}{dt} + \text{div}\,(\rho\vec{v}) = 0,$$

unde $\rho = \rho(x, y, z)$ este densitatea lichidului, $\vec{v}$ este vectorul viteză, iar t este timpul.

Indicaţie. Se va considera fluxul lichidului printr-un volum oarecare ω conţinut în V.

4452. Să se calculeze lucrul mecanic al vectorului $\vec{a} = \vec{r}$ de-a lungul elicei $\vec{r} = \vec{i}a\cos t + \vec{j}a\sin t + \vec{k}bt$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$.

4453. Să se calculeze lucrul mecanic al vectorului $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ de-a lungul arcului AB, unde f este o funcţie continuă.

4454. Să se afle circulaţia vectorului

$$\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$$

(c este constant): a) de-a lungul cercului $x^2+y^2=1$, $z=0$; b) de-a lungul cercului $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$.

4455. Să se calculeze circulaţia Γ a vectorului $\vec{a} = \text{grad}\left(\text{arctg}\,\frac{y}{x}\right)$ de-a lungul conturului C în următoarele două cazuri: a) C nu înconjură axa Oz; b) C înconjură această axă.

4456. Fluxul staţionar plan al unui lichid este caracterizat prin vectorul viteză

$$\vec{w} = u(x, y)\,\vec{i} + v(x, y)\,\vec{j}.$$

Să se determine: 1) cantitatea de lichid Q care trece prin conturul închis C, contur care limitează domeniul S (debitul lichidului); 2) circulaţia Γ a vectorului viteză de-a lungul conturului C. Ce ecuaţie verifică funcţiile u şi v dacă lichidul este incompresibil şi fluxul este irotaţional?

4457. Să se arate că

$$\vec{a} = yz(2x+y+z)\,\vec{i} + xz(x+2y+z)\,\vec{j} + xy(x+y+2z)\,\vec{k}$$

este un cîmp potenţial şi să se determine potenţialul acestui cîmp.

4458. Să se determine potenţialul cîmpului gravitaţional

$$\vec{a} = -\frac{m}{r^3}\vec{r},$$

creat de masa m, situată în originea coordonatelor.

4459. Să se determine potenţialul cîmpului gravitaţional pe care-l creează sistemul de mase m_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, situate în punctele M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$.

4460. Să se demonstreze că $\vec{a} = f(r)\vec{r}$, unde $f(r)$ este o funcţie continuă şi uniformă, este un cîmp potenţial. Să se calculeze potenţialul acestui cîmp.

4461. Să se demonstreze formula

$$\text{grad}_P\left\{\iiint\limits_V \rho(Q)\frac{dV}{r}\right\} = -\iint\limits_S \rho(Q)\vec{n}\,\frac{dS}{r} + \iiint\limits_V \text{grad}_Q\,\rho(Q)\frac{dV}{r},$$

unde S este suprafaţa care limitează volumul V, $\vec{n}$ este normala exterioară la suprafaţa S, iar r este distanţa dintre punctele $P(x, y, z)$ şi $Q(\xi, \eta, \zeta)$.

4462. Să se demonstreze că dacă $\vec{a} = \text{grad}\,u$, unde

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

şi

$$r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

atunci

$$\text{div}\,\vec{a} = \rho(x, y, z)$$

(în ipoteza că integralele respective au sens).

RĂSPUNSURI

PARTEA ÎNTÎI

Capitolul I

16. 0; 1. 17. $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. 22. $-1{,}01<x<-0{,}99$. 23. $x\leqq-8$ sau $x\geqq 12$. 24. $x<-\frac{1}{2}$. 25. $0<x<\frac{2}{3}$. 26. $|x|\leqq 6$. 27. $x>-$ $-\frac{1}{2}$. 28. $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$. 29. $\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10}$ sau $\frac{5+\sqrt{20}}{10}<$ $<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}$. 31. A doua. 32. Două zecimale. 33. Nu depăşeşte $0{,}42\,{}^0/_0$. 34. $9{,}9102\ \text{cm}^2\leqq S\leqq 10{,}0902\ \text{cm}^2$; $\Delta\leqq 0{,}0902\ \text{cm}^2$; $\delta\leqq$ $\leqq 0{,}91\,{}^0/_0$. 35. $3{,}93\ \text{g/cm}^3\pm 0{,}27\ \text{g/cm}^3$; $\delta\leqq 7{,}3\,{}^0/_0$. 36. $\delta\leqq 3{,}05\,{}^0/_0$. 37. $172{,}480\ \text{m}^3\leqq V\leqq 213{,}642\ \text{m}^3$; $V=192{,}660\ \text{m}^3\pm 20{,}982\ \text{m}^3$; $\delta\approx$ $\approx 12{,}2\,{}^0/_0$. 38. $\Delta\leqq 0{,}17$ mm. 39. $\Delta<0{,}0005$ m. 42. a) $N\geqq\frac{1}{\varepsilon}$; b) $N\geqq\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$; c) $N\geqq 1+\frac{\lg\frac{1}{\varepsilon}}{\lg 2}$; d) $N\geqq\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0{,}999}\approx 2330\lg\frac{1}{\varepsilon}$. 43. a) $N\geqq E$; b) $N\geqq\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$; c) $N\geqq 10^{10^E}$. 46. 0. 47. 0. 48. 0. 49. $\frac{2}{3}$. 50. $\frac{1-b}{1-a}$. 51. $\frac{1}{2}$. 52. $\frac{1}{2}$. 53. $\frac{1}{3}$. 54. $\frac{4}{3}$. 55. 3. 56. 1. 57. 2. 67. a) A doua; b) prima; c) a doua. 73. $e=2{,}71828\ldots$ 92. Este egală cu 1 dacă $a\neq 0$ şi poate avea orice valoare sau poate să nu existe dacă $a=0$. 93. $x_3=$ $=1\frac{1}{8}$. 97. $x_{100}=\frac{1}{20}$. 98. $x_{1000}=\frac{1000^{1000}}{1000!}\approx 2{,}49\cdot 10^{452}$. 99. $x_4=x_5=$ $=-120$. 100. $x_{10}=20$. 101. 0; 1; 1; 1. 102. -1; $1\frac{1}{2}$; 0; 1. 103. 0; 2; 0; 2. 104. -4; 6; -4; 6. 105. $-\frac{1}{2}$; 1; $-\frac{1}{2}$; 1. 106. $-\infty$;

$+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. 107. $-\infty$; -1; $-\infty$; $-\infty$. 108. 0; $+\infty$; 0; $+\infty$. 109. $-\infty$; $+\infty$; $-\infty$; $+\infty$. 110. -5; 1,25; 0; 0. 111. $-\frac{1}{2}$; 1. 112. $-\left(e+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $e+1$. 113. 0; 1. 114. 1; 2. 115. 0; 1. 116. 0; 1. 117. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ...; 0. 118. Toate numerele reale cuprinse între 0 şi 1, inclusiv ultimele. 119. 1; 5. 120. a; b. 127. a) Este divergentă; b) poate să fie atît convergentă cît divergentă. 128. a) Nu se poate; b) nu se poate. 129. Nu. 130. Nu. 144. a) 0; b) 0. 147. ln 2. 148. $\frac{1}{3}(a+2b)$. 151. $-\infty<x<+\infty$, $x\neq-1$. 152. $-\infty<x\leqq-\sqrt{3}$ şi $0\leqq x\leqq\sqrt{3}$. 153. $-1\leqq x\leqq 1$ şi $x=2$. 154. a) $|x|>2$; b) $x>2$. 155. $4k^2\pi^2\leqq x\leqq(2k+1)^2\pi^2$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$. 156. $|x|\leqq\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ şi $\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k-1)}\leqq|x|\leqq\sqrt{\frac{\pi}{2}(4k+1)}$ $(k=1,2,\ldots)$. 157. $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$ şi $-\frac{1}{2k}<x<-\frac{1}{2k+1}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ldots)$. 158. $x>0$, $x\neq n\ (n=1,2,\ldots)$ 159. $-\frac{1}{3}\leqq x\leqq 1$. 160. $|x-k\pi|\leqq\frac{\pi}{6}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$. 161. $10^{\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}<x<10^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. 162. $x=-1,-2,-3,\ldots$ şi $x\geqq 0$. 163. $x<0$, $x\neq-n\ (n=1,\ 2,\ldots)$. 164. $1<x\leqq 2$. 165. $x=$ $=\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ldots$ 166. $-1\leqq x\leqq 2$; $0\leqq y\leqq 1\frac{1}{2}$. 167. $2k\pi+$ $+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$; $-\infty<y\leqq\lg 3$. 168. $-\infty<x<+\infty$; $0\leqq y\leqq\pi$. 169. $1\leqq x\leqq 100$; $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$. 170. $x=\frac{p}{2q+1}$, unde p şi q sînt numere întregi; $y=\pm 1$. 171. $P=2b+$ $+2\left(1-\frac{b}{h}\right)x$ $(0<x<h)$; $S=bx\left(1-\frac{x}{h}\right)$ $(0<x<h)$. 172. $a=$ $=\sqrt{100-96\cos x}$ $(0<x<\pi)$; $S=24\sin x$ $(0<x<\pi)$. 173. $S=\frac{h}{a-b}\times$ $\times x^2$, dacă $0\leqq x\leqq\frac{a-b}{2}$; $S=h\left(x-\frac{a-b}{4}\right)$, dacă $\frac{a-b}{2}<x<\frac{a+b}{2}$; $S=$ $=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right]$, dacă $\frac{a+b}{2}\leqq x\leqq a$. 174. $m(x)=0$, dacă $-\infty<x\leqq 0$; $m(x)=2x$, dacă $0<x\leqq 1$; $m(x)=2$, dacă $1<x\leqq 2$; $m(x)=3$, dacă $2<x\leqq 3$; $m(x)=4$, dacă $3<x<+\infty$. 178. $E_y=(1\leqq y\leqq 4)$. 179. $E_y=(1<y<3)$. 180. $E_y=(0<y<1)$. 181. $E_y=\{1<|y|<+\infty\}$. 182. $E_y=(1\leqq y\leqq 2)$. 183. $a<y<b$, pentru $a<b$, şi $b<y<a$, pentru $a>b$. 184. $1<y<+\infty$. 185. $0>y>-\infty$ şi $+\infty>y>1$. 186. $0<y\leqq\frac{1}{2}$. 187.

$+\infty>y>-\infty$. **188.** $0<y<\frac{1}{2}$ şi $\frac{3}{2}\leqq y<2$. **189.** 0; 0; 0; 0; 24. **190.** 0; —6; 4; **191.** 1; 1; 1; 2. **192.** —1; 0; 1; 2; 4. **193.** 1, $\frac{1+x}{1-x}$, $\frac{-x}{2+x}$, $\frac{2}{1+x}$, $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{1+x}{1-x}$. **194.** a) $f(x)=0$, dacă $x=-1$, $x=0$ şi $x=1$; $f(x)>0$, dacă $-\infty<x<-1$ şi $0<x<1$; $f(x)<0$, dacă $-1<x<0$ şi $1<x<+\infty$; b) $f(x)=0$, dacă $x=\pm\frac{1}{k}$; $f(x)>0$, dacă $\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k}$ şi $-\frac{1}{2k+1}<x<-\frac{1}{2k+2}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$; $f(x)<0$, dacă $\frac{1}{2k+2}<x<\frac{1}{2k+1}$ şi $-\frac{1}{2k}<x<-\frac{1}{2k+1}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$; c) $f(x)=0$, dacă $x\leqq 0$ şi $x=1$; $f(x)>0$, dacă $0<x<1$; $f(x)<0$, dacă $1<x<+\infty$. **195.** a) a; b) $2x+h$; c) $a^x \cdot \frac{a^h-1}{h}$. **197.** $f(x)=\frac{7}{3}x-2$; $f(1)=\frac{1}{3}$; $f(2)=2\frac{2}{3}$. **198.** $f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1$; $f(-1)=-\frac{2}{3}$; $f(0,5)=2\frac{17}{24}$. **199.** $f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2$. **200.** $f(x)=10+5\cdot 2^x$. **203.** a) $2k\pi<x<\pi+2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; b) $1<x<e$; c) $x>0, x\neq k$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. **205.** a) $z=x+y$; b) $z=\frac{xy}{x+y}$; c) $z=\frac{x+y}{1-xy}$; d) $z=\frac{x+y}{1+xy}$. **206.** $\varphi(\varphi(x))=x^4$, $\psi(\psi(x))=2^{2^x}$; $\varphi(\psi(x))=2^{2x}$; $\psi(\varphi(x))=2^{x^2}$. **207.** $\varphi(\varphi(x))=\operatorname{sgn} x$; $\psi(\psi(x))=x$ $(x\neq 0)$; $\varphi(\psi(x))=\psi(\varphi(x))=\operatorname{sgn} x$ $(x\neq 0)$. **208.** $\varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$; $\psi(\varphi(x))=\psi(x)$; $\psi(\psi(x))=\varphi(\psi(x))=0$. **209.** $-\frac{1-x}{x}$; x. **210.** $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. **211.** x^2-5x+6. **212.** x^2-2. **213.** $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. **221.** a) Creşte pentru $a>0$ şi descreşte pentru $a<0$; b) pentru $a>0$ descreşte în intervalul $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ şi creşte în intervalul $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$; c) creşte; d) pentru $ad-bc>0$ creşte în intervalul $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ şi $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$; e) creşte pentru $a>1$ şi descreşte pentru $0<a<1$. **222.** Este posibil dacă baza logaritmilor este mai mare decît 1. **224.** $\frac{y-3}{2}$ $(-\infty<y<+\infty)$. **225.** a) $-\sqrt{y}$ $(0\leqq y<+\infty)$; b) $\sqrt{y}$ $(0\leqq y<+\infty)$. **226.** $\frac{1-y}{1+y}$ $(y\neq -1)$. **227.** a) $-\sqrt{1-y^2}$ $(0\leqq y\leqq 1)$; b) $\sqrt{1-y^2}$ $(0\leqq y\leqq 1)$. **228.** $\operatorname{ar\,sh} y=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$ $(-\infty<x<+\infty)$. **229.** $\operatorname{ar\,th} y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$ $(-1<y<1)$. **230.** $x=y$, dacă $-\infty<y<1$; $x=\sqrt{y}$, dacă $1\leqq y\leqq 16$; $x=\log_2 y$, dacă $16<y<+\infty$. **231.** a) Este impară; b) este pară; c) este pară; d) este

impară; e) este impară. **233.** a) Este periodică, $T=\frac{2\pi}{\lambda}$; b) este periodică, $T=2\pi$; c) este periodică, $T=6\pi$; d) este periodică, $T=\pi$; e) nu este periodică; f) este periodică, $T=\pi$; g) nu este periodică; h) nu este periodică. **241.** $t=1\frac{2}{3}$ s; $x=-3\frac{1}{3}$ m. **243.** $x_0=-\frac{b}{2a}$, $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$. **244.** $y=x-\frac{x^2}{36\,000}$; 9 km, 36 km. **251.** $x_0=-\frac{d}{c}$; $y_0=\frac{a}{c}$. **252.** $p=\frac{12}{v}$ $(v>0)$. **263.** $k=\frac{a}{a_1}$, $m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$, $n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)$, $x_0=-\frac{b_1}{a_1}$. **264.** $y=\frac{10}{x^2}$. **287.** $A=\sqrt{a^2+b^2}$; $\sin x_0=-\frac{a}{A}$, $\cos x_0=\frac{b}{A}$. **355.** $y=2\sin x$, dacă $|x-\pi k|\leqq\frac{\pi}{6}$ şi $y=(-1)^k$, dacă $\frac{\pi}{6}<|x-\pi k|<\frac{5\pi}{6}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **357.** a) $y=\frac{1}{2}(x+|x|)$; b) şi c) $y=x^2$, dacă $x\geqq 0$; $y=0$, dacă $x<0$; d) $y=x$, dacă $x<0$; $y=x^4$, dacă $x\geqq 0$. **358.** a) $y=1$; b) $y=1$, dacă $1\leqq|x|\leqq\sqrt{3}$; $y=0$, dacă $|x|<1$ sau $|x|>\sqrt{3}$; c) $y=1$, dacă $|x|\leqq 1$; $y=2$, dacă $|x|>1$; d) $y=-2$, dacă $|x|>2$; $y=2-(2-x^2)^2$, dacă $|x|\leqq 2$. **359.** Pentru $x<0$ avem: a) 1) $f(x)=1+x$, 2) $f(x)=-(1+x)$; b) 1) $f(x)=-2x-x^2$; 2) $f(x)=2x+x^2$; c) 1) $f(x)=\sqrt{-x}$, 2) $f(x)=-\sqrt{-x}$; d) 1) $f(x)=-\sin x$, 2) $f(x)=\sin x$; e) 1) $f(x)=e^{-x}$, 2) $f(x)=-e^{-x}$; f) 1) $f(x)=\ln(-x)$, 2) $f(x)=-\ln(-x)$. **360.** a) $x=-\frac{b}{2a}$; b) $x=\frac{1}{2}$; c) $x=\frac{b-a}{2}$; d) $x=\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **361.** a) (x_0, ax_0+b), unde x_0 este oarecare; b) $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$; c) (x_0, y_0), unde $x_0=-\frac{b}{3a}$ şi $y_0=ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d$; d) (2, 0); e) (2, 1). **372.** Rădăcinile sînt: — 1,88; 0,35; 1,53. **373.** 2,11; —0,25; —1,86. **374.** 0,25; 1,49. **375.** 0,64. **376.** 1,37; 10. **377.** —0,54. **378.** 0; 4,49; 7,73. **379.** $x_1=-0{,}57$, $y_1=-1{,}26$; $x_2=-0{,}42$, $y_2=1{,}19$; $x_3=0{,}46$, $y_3=0{,}74$; $x_4=0{,}54$, $y_4=-0{,}68$. **380.** $x_1=-1{,}30$, $y_1=9{,}91$; $x_2=2{,}30$, $y_2=9{,}74$; $x_3=-0{,}62$, $y_3=-9{,}98$; $x_4=1{,}62$, $x_4=-9{,}87$. **382.** a) În general, nu; b) da. **385.** Mărginit superior şi nemărginit inferior. **387.** $f(a)$ şi $f(b)$. **388.** 0; 25. **389.** 0; 1. **390.** 0; 1. **391.** 2; $+\infty$. **392.** —1; 1. **393.** $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **394.** $\frac{1}{2}$; 4. **395.** a) 0, 1; b) 0; 2. **396.** 0; 1. **397.** a) 8; b) 0,8; c) 0,08; d) 0,008. **398.** a) π; b) π; c) π; d) π. **411.** a) 1; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{2}$. **412.** 6. **413.** 10. **414.** $\frac{1}{2}nm(n-m)$. **415.** 5^{-5}. **416.** $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$. **417.** n^{-n}. **418.** $-\frac{1}{2}$. **419.** $\frac{1}{2}$.

420. $\frac{1}{2}$. 421. $\frac{1}{4}$. 422. $\frac{1}{3}$. 423. $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. 424. $\frac{n(n+1)}{2}$. 425. $\frac{m}{n}$. 426. $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. 427. $\frac{n(n+1)}{2}$. 428. $\frac{m-n}{2}$. 429. $x+\frac{a}{2}$. 430. $x^2+ax+\frac{a^2}{3}$. 431. 1. 432. $\frac{1}{2}$. 433. $\frac{27}{4}$. 434. $\frac{ab}{3}$. 435. 1. 436. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 437. $\frac{4}{3}$. 438. -2. 439. $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. 440. $-\frac{1}{16}$. 441. $\frac{1}{144}$. 442. $\frac{1}{4}$. 443. $\frac{12}{5}$. 444. $\frac{1}{n}$. 445. -2. 446. $\frac{1}{4}$. 447. $\frac{2}{27}$. 448. $\frac{3}{2}$. 449. $4\frac{4}{27}$. 450. $\frac{7}{36}$. 451. $-\frac{1}{2}$. 452. $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$. 453. $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$. 455. $\frac{n}{m}$. 456. $\frac{1}{n!}$. 457. $\frac{1}{2}(a+b)$. 458. $\frac{1}{2}$. 459. $-\frac{1}{4}$. 460. 1. 461. $\frac{2}{3}$. 462. 2. 463. $\frac{4}{3}$. 464. $-\frac{1}{4}$. 465. $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. 466. 2^n. 467. $2n$. 468. $\lim\limits_{a\to 0} x_1=\infty$, $\lim\limits_{a\to 0} x_2=-\frac{c}{b}$. 469. $a=1$, $b=-1$. 470. $a_i=\pm 1$; $b_i=\mp\frac{1}{2}$ $(i=1, 2)$. 471. 5. 472. 0. 473. $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$. 474. $\frac{1}{2}$. 475. $\frac{1}{2}$. 476. 2. 477. 4. 478. $\frac{1}{p}$. 479. $\frac{1}{2}$. 480. $\frac{2}{\pi}$. 482. $\cos a$. 483. $-\sin a$. 484. $\sec^2 a$ $\left(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1,\ldots\right)$. 485. $-\frac{1}{\sin^2 a}$ ($a\neq k\pi$, unde k este întreg). 486. $\frac{\sin a}{\cos^2 a}$ $\left(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right.$, unde k este întreg$\left.\right)$. 487. $-\frac{\cos a}{\sin^2 a}$ ($a\neq k\pi$, unde k este întreg). 488. $-\sin a$. 489. $-\cos a$. 490. $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$ $\left(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right.$, unde k este întreg$\left.\right)$. 491. $\frac{2\cos a}{\sin^3 a}$ ($a\neq k\pi$, unde k este întreg). 492. $\frac{3}{2}\sin 2a$. 493. -3. 494. 14. 495. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 496. -24. 497. $-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}$ $\left(a\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\right.$, unde k este întreg$\left.\right)$. 498. $\frac{3}{4}$. 499. $\frac{1}{4}$. 500. $\frac{4}{3}$. 501. $\frac{1}{12}$. 502. $\sqrt{2}$. 503. 0. 504. 3. 505. 0. 506. a) $\frac{1}{2}$; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 1. 507. 0. 508. 0. 509. 0. 510. 0. 511. 1. 512. e^3. 513. 1. 514. e^{-2}. 515. e^{2a}. 516. 0, pentru $a_1<a_2$; $+\infty$, pentru $a_1>a_2$; $e^{\frac{b_1-b_2}{a_1}}$, pentru $a_1=a_2$. 517. e. 518. e^{-1}. 519. 1. 520. $e^{\operatorname{ctg} a}$ ($a\neq k\pi$, k — întreg). 521. $e^{-\frac{3}{2}}$. 522. e^{-1}. 523. 1. 524. e^{-2}. 525. e. 526. $\frac{1}{\sqrt{a}}$. 527. e^{x+1}. 528. $e^{-\frac{x^2}{2}}$. 529. 1. 530. 1. 531. $\frac{1}{a}$. 532. 0. 533. $\frac{1}{5}$. 534. -2. 535. $\frac{3}{2}$. 536. $\frac{3}{2}$.

537. $-\frac{\log e}{x^2}$. 538. $\frac{2a}{b}$. 539. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. 540. n. 541. $\ln a$. 542. $a^a\ln\frac{a}{e}$. 543. $a^a\ln ea$. 544. e^2. 545. $\frac{2}{3}$. 546. e^2. 547. 1. 548. $\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}$. 549. $a^b\ln a$. 550. $a^x\ln^2 a$. 551. $e^{-(a+b)}$. 552. $\ln x$. 553. $\ln x$. 554. $\sqrt[a]{b}$. 555. $\sqrt{ab}$. 556. $\sqrt[3]{abc}$. 557. $(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$. 558. $\frac{1}{\sqrt{ab}}$. 559. $\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}$. 560. $a^{a^a}\ln a$. 561. a) 0; b) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$. 562. $\ln 8$. 563. $-\ln 2$. 566. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. 567. 1. 568. 0. 569. $\ln a^2$. 570. $\frac{1}{8}$. 571. $\frac{1}{2}$. 572. -2. 573. e^2. 574. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 575. $\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$. 576. $\frac{1}{18}$. 577. $2\operatorname{sh}1$. 578. $\ln 2$. 579. 1. 580. e^{π^2}. 581. $-\frac{\pi}{2}$. 582. $\frac{\pi}{3}$. 583. $-\frac{\pi}{2}$. 584. $\frac{3\pi}{4}$. 585. $\frac{1}{1+x^2}$. 586. 2. 587. $\frac{e^x}{x^2+1}$. 583. $\frac{1}{2}$. 589. 1. 590. $e^{\frac{2}{\pi}}$. 591. 0. 592. 0. 593. a) $+\infty$; b) $\frac{1}{2}$. 594. a) -1; b) 1. 595. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $-\frac{\pi}{2}$. 596. a) 1; b) 0. 597. a) 0; b) 1. 600. 2; 1; 2. 601. 0; $(-1)^{n-1}$; $(-1)^n$. 602. 0. 603. 1. 604. 0. 605. 1. 606. 0. 613. b) $y=1$, dacă $|x|<1$; $y=0$, dacă $|x|=1$. 614. b) $y=0$, dacă $0\leqq x<1$; $y=\frac{1}{2}$, dacă $x=1$; $y=1$, dacă $1<x<+\infty$. 615. $y=-1$, dacă $0<|x|<1$; $y=0$, dacă $|x|=1$; $y=1$, dacă $|x|>1$. 616. $y=|x|$. 617. $y=1$, dacă $0\leqq x\leqq 1$; $y=x$, dacă $x>1$. 618. $y=1$, dacă $0\leqq x\leqq 1$; $y=x$, dacă $1<x<\sqrt{2}$; $y=\frac{x^2}{2}$, dacă $x\geqq\sqrt{2}$. 619. $y=0$, dacă $0\leqq x<2$; $y=2\sqrt{2}$, dacă $x=2$; $y=x^2$, dacă $x>2$. 620. b) $y=0$, dacă $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $y=1$, dacă $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$. 621. $y=\ln 2$, dacă $0\leqq x\leqq 2$; $y=\ln x$, dacă $x\geqq 2$. 622. $y=0$, dacă $-1<x\leqq 1$; $y=\frac{\pi}{2}(x-1)$, dacă $x>1$. 623. $y=1$, dacă $x\leqq -1$; $y=e^{x+1}$, dacă $x>-1$. 624. $y=x$ pentru $x<0$; $y=\frac{1}{2}$ pentru $x=0$; $y=1$ pentru $x>0$. 625. $\frac{1}{x}$. 627. a) $x=1$, $x=-2$, $y=x-1$; b) $y=x+\frac{1}{2}$ pentru $x\to+\infty$, $y=x-\frac{1}{2}$ pentru $x\to-\infty$; c) $y=\frac{1}{3}-x$; d) $y=x$ pentru $x\to+\infty$, $y=0$ pentru $x\to-\infty$;

e) $y=0$ pentru $x\to-\infty$, $y=x$ pentru $x\to+\infty$; f) $y=x+\frac{\pi}{2}$; g) $y=\frac{x}{e}+\frac{1}{2e}$. **628.** 0. **629.** $\frac{1}{1-x}$. **630.** $\frac{\sin x}{x}$. **632.** $\frac{1}{6}$. **633.** $\frac{a}{2}$. **634.** $\frac{1}{2}\ln a$. **635.** $\sqrt{e}$. **636.** $e^{-\frac{a^2}{6}}$. **637.** $\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4a})$. **638.** $\sqrt{1+x}-1$. **639.** $1-\sqrt{1-x}$. **641.** a) 2; b) $+\infty$; c) 0; d) 1; e) 2; f) 1; g) $2\operatorname{sh}1$. **643.** a) $l=-1$, $L=2$; b) $l=-2$, $L=2$; c) $l=2$, $L=e$. **644.** a) $l=-1$, $L=1$; b) $l=0$, $L=+\infty$; c) $l=\frac{1}{2}$, $L=2$; d) $l=0$, $L=+\infty$. **645.** a) De ordinul întîi; b) de ordinul al doilea; c) de ordinul întîi; d) de ordinul al treilea; e) de ordinul al treilea; f) de ordinul al treilea.

653. a) $2x$; b) x; c) $\frac{x^2}{2}$; d) $\frac{x^3}{2}$. **655.** a) $3(x-1)^2$; b) $\frac{(1-x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2}}$; c) $x-1$; d) $\frac{e}{2}(x-1)^2$; e) $x-1$. **656.** a) x^2; b) $2x^2$; c) $x^{\frac{2}{3}}$; d) $x^{\frac{1}{8}}$. **657.** a) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; b) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$; c) $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$; d) $\left(\frac{1}{x}\right)^2$. **658.** a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)$; b) $\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}$; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}$; d) $\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1-x}$; e) $\frac{1}{x-1}$. **663.** a) $9{,}95<x<10{,}05$; b) $9{,}995<x<10{,}005$; c) $9{,}9995<x<10{,}0005$; d) $\sqrt{100-\varepsilon}<x<\sqrt{100+\varepsilon}$. **664.** $\Delta<\frac{\varepsilon}{27}$; a) $\Delta<3{,}7$ mm; b) $\Delta<0{,}37$ mm; c) $\Delta<0{,}037$ mm. **665.** $100[1-10^{-(n+1)}]^2<x<100[1+10^{-(n+1)}]^2$; a) $81<x<121$; b) $98{,}01<x<102{,}01$; c) $99{,}8001<x<100{,}2001$; d) $99{,}980001<x<100{,}020001$. **666.** $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right)$. **667.** $\delta=\frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}\approx0{,}001x_0^2$; a) $\delta\approx10^{-5}$; b) $\delta\approx10^{-7}$; c) $\delta\approx10^{-9}$. Nu se poate. **669.** a) Nu se poate; b) se poate. **671.** Nu; proprietatea că este mărginită în punctul x_0. **672.** Nu; dacă funcţia $f(x)$ este definită în intervalul finit (a, b), aceste inegalităţi sînt satisfăcute totdeauna; dacă cel puţin a sau b este egal cu simbolul ∞, $\lim\limits_{x\to\infty}|f(x)|=+\infty$. **673.** Nu; uniformitatea şi continuitatea funcţiei inverse. **675.** Este continuă. **676.** Este continuă dacă $A=4$ şi este discontinuă pentru $x=2$, dacă $A\neq4$. **677.** Este discontinuă pentru $x=-1$. **678.** a) Este continuă; b) este discontinuă pentru $x=0$. **679.** Este discontinuă pentru $x=0$. **680.** Este continuă. **681.** Este continuă. **682.** Este discontinuă pentru $x=1$. **683.** Este continuă

pentru $a=0$ şi discontinuă pentru $a\neq0$. **684.** Este discontinuă pentru $x=0$. **685.** Este discontinuă pentru $x=k$ (k fiind un număr întreg). **686.** Este discontinuă pentru $x=k^2$ $(k=1, 2, \ldots)$. **687.** $x=-1$ este un punct de discontinuitate infinită. **688.** $x=-1$ este un punct de discontinuitate neesenţială. **689.** $x=-2$ şi $x=1$ sînt puncte de discontinuitate infinită. **690.** $x=0$ şi $x=1$ sînt puncte de discontinuitate neesenţială; $x=-1$ este un punct de discontinuitate infinită. **691.** $x=0$ este un punct de discontinuitate neesenţială; $x=k\pi$ $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate infinită. **692.** $x=\pm2$ sînt puncte de discontinuitate neesenţială. **693.** $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua. **694.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi; $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua. **695.** $x=\frac{2}{2k+1}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate neesenţială. **696.** $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa întîi. **697.** $x=0$ este un punct de discontinuitate neesenţială. **698.** $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua. **699.** $x=0$ este un punct de discontinuitate neesenţială; $x=1$ este un punct de discontinuitate infinită. **700.** $x=0$ este un punct de discontinuitate infinită; $x=1$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua. **701.** $x=k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **702.** $x=k$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **703.** $x=k$ $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **704.** Funcţia este continuă. **705.** $x=\pm\sqrt{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **706.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi; $x=0$ este un punct de discontinuitate infinită. **707.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi; $x=0$ este un punct de discontinuitate neesenţială. **708.** $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi; $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua. **709.** $x=\pm\frac{1}{k}$ şi $x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k=1, 2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi; $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua. **710.** $x=\frac{1}{k}$ $(k=\pm1, \pm2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate infinită; $x=0$ este un punct de discontinuitate de

speţa a doua. **711.** $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ sînt puncte de discontinuitate infinită; $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua. **712.** $x=\pm\sqrt{n}\ (n=1,\ 2,\ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **713.** $x=0$, $x=1$ şi $x=2$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **714.** $x=k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ sînt puncte de discontinuitate infinită. **715.** $x=\pm\sqrt{k\pi}\ (k=0, 1, 2,\ldots)$ sînt puncte de discontinuitate infinită. **716.** $x=-1$ şi $x=3$ sînt puncte de discontinuitate infinită. **717.** $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua. **718.** $x=0$ este un punct de discontinuitate neesenţială. **719.** $x=\pm 1$ este un punct de discontinuitate de speţa întîi. **720.** $y=1$, dacă $0\leqq x<1$; $y=\frac{1}{2}$, dacă $x=1$; $y=0$, dacă $x>1$; $x=1$ este un punct de discontinuitate de speţa întîi. **721.** $y=\operatorname{sgn} x$; $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa întîi. **722.** $y=1$, dacă $|x|\leqq 1$; $y=x^2$, dacă $|x|>1$. Funcţia este continuă. **723.** $y=0$, dacă $x\neq k\pi$; $y=1$, dacă $x=k\pi\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$; $x=k\pi$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **724.** $y=x$, dacă $|x-k\pi|<\frac{\pi}{6}$; $y=\frac{x}{2}$, dacă $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$; $y=0$, dacă $\frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6}$ $(k=0,\ \pm 1,\ldots)$; $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **725.** $y=\frac{\pi}{2}x$, dacă $k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2}$; $y=-\frac{\pi}{2}x$, dacă $k\pi+\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\pi$; $y=0$, dacă $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ \pm 1,\ldots)$; $x=\frac{k\pi}{2}\neq 0$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **726.** $y=x$ pentru $x\leqq 0$; $y=x^2$ pentru $x>0$. Funcţia este continuă. **727.** $y=0$ pentru $x\leqq 0$ şi $y=x$ pentru $x>0$. Funcţia este continuă. **728.** $y=-(1+x)$ pentru $x<0$; $y=0$ pentru $x=0$ şi $y=1+x$ pentru $x>0$; $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa întîi. **729.** Nu. **730.** $a=1$. **731.** a) Funcţia este continuă; b) $x=-1$ este un punct de discontinuitate de speţa întîi; c) $x=-1$ este un punct de discontinuitate de speţa întîi; d) $x=k\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ sînt puncte de discontinuitate infinită; e) $x\neq k\ (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa a doua. **732.** $d=-x$ pentru $-\infty<x<0$; $d=0$ pentru $0\leqq x\leqq 1$; $d=x-1$ pentru $1<x\leqq\frac{3}{2}$; $d=2-x$ pentru $\frac{3}{2}<x<2$; $d=0$ pentru $2\leqq x\leqq 3$; $d=x-3$ pentru $3<x<+\infty$. Funcţia este continuă. **733.** $S=3y-\frac{y^2}{2}$ pentru $0\leqq y\leqq 1$; $S=\frac{1}{2}+2y$ pentru

$1<y\leqq 2$; $S=\frac{5}{2}+y$ pentru $2<y\leqq 3$; $S=\frac{11}{2}$ pentru $3<y<+\infty$; funcţia este continuă; $b=3-y$ pentru $0\leqq y\leqq 1$; $b=2$ pentru $1<y\leqq 2$; $b=1$ pentru $2<y\leqq 3$; $b=0$ pentru $3<y<+\infty$; $x=2$ şi $x=3$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **735.** Este discontinuă pentru $x\neq 0$ şi continuă pentru $x=0$. **737.** Este discontinuă pentru toate valorile negative şi pozitive ale variabilei. **738.** $f(0)=0{,}5$. **740.** a) 1,5; b) 2; c) 0; d) e; e) 0; f) 1; g) 0. **741.** a) Da; b) nu; **742.** a) Nu; b) nu. **743.** Nu, de exemplu: $f(x)=1$, dacă x este raţional, şi $f(x)=-1$, dacă x este iraţional. **744.** a) $f(g(x))$ este continuă, $g(f(x))$ este discontinuă pentru $x=0$; b) $f(g(x))$ este discontinuă pentru $x=-1$, $x=0$ şi $x=1$, $g(f(x))=0$ este continuă; c) $f(g(x))$ şi $g(f(x))$ sînt continue. **745.** $f(\varphi(x))\equiv x$. **759.** $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$; $a+d=0$. **760.** $x=y-k$, dacă $2k\leqq y<2k+1$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$. **764.** $f(f(x))\equiv x$. **767.** $x=-\sqrt{y}\ (0\leqq y<+\infty)$; $x=\sqrt{y}\ (0\leqq y<+\infty)$. **768.** $x=1-\sqrt{1-y}$ $(-\infty<y\leqq 1)$; $x=1+\sqrt{1-y}$ $(-\infty<y\leqq 1)$. **769.** $x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(-1\leqq y\leqq 1)$; $x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$ $(0<|y|\leqq 1)$. **770.** $x=(-1)^k\arcsin y+\pi k$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ $(-1\leqq y\leqq 1)$. **771.** $x=2\pi k\pm\arccos y$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$ $(-1\leqq y\leqq 1)$. **772.** $x=\operatorname{arctg} y+\pi k$ $(k=0,\ \pm 1\ \pm 2,\ldots)$ $(-\infty<y<+\infty)$. **776.** $\varepsilon=0$, dacă $xy<1$; $\varepsilon=\operatorname{sgn} x$, dacă $xy>1$. **779.** a) $y=-\frac{\pi}{2}$, dacă $-1\leqq x\leqq 0$; $y=2\arcsin x-\frac{\pi}{2}$, dacă $0\leqq x\leqq 1$; b) $y=-(\pi+4\arcsin x)$, dacă $-1\leqq x\leqq -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y=0$, dacă $-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y=\pi-4\arcsin x$, dacă $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq 1$. **780.** $y=\frac{\pi}{2}-x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$. **781.** $y=\sqrt{x^2-1}$ $(1\leqq x<+\infty)$; $y=-\sqrt{x^2-1}$ $(1\leqq x<+\infty)$. **782.** Pentru toate valorile lui t, pentru care $\varphi(t)=x$ este o valoare arbitrară a funcţiei $\varphi(t)$, funcţia $\psi(t)$ trebuie să aibă şi ea aceeaşi valoare. **783.** Mulţimea valorilor lui $\chi(\tau)$ pentru $\alpha<\tau<\beta$ trebuie să fie intervalul (a, b). **784.** Pentru toate valorile lui x, pentru care $\varphi(x)=u$, unde u este un număr arbitrar din intervalul (A, B), funcţia $\psi(x)$ trebuie să ia aceeaşi valoare. **785.** $\delta\leqq\frac{\varepsilon}{20}$ cm. a) 0,5 mm; b) 0,005 mm; c) 0,000 05 mm; **786.** a) $\delta<\frac{1}{2}$; b) $\delta<0{,}005$; c) $\delta<5\cdot 10^{-7}$; d) $\delta<\frac{\varepsilon^3}{2}$ $(\varepsilon\leqq 1)$. **793.** a) Da; b) nu. **794.** Este uniform

continuă. **795.** Nu este uniform continuă. **796.** Eeste uniform continuă. **797.** Nu este uniform continuă. **798.** Este uniform continuă. **799.** Este uniform continuă. **800.** Nu este uniform continuă. **802.** a) $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$; b) $\delta=\frac{\varepsilon}{8}$; c) $\delta=0{,}01\,\varepsilon$; d) $\delta=\varepsilon^2$ $(\varepsilon\leq 1)$; e) $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$; f) $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon}\right)$. **803.** $n\geq 1\,800\,000$. **808.** a) $\omega_f(\delta)\leq 3\delta$; b) $\omega_f(\delta)\leq\sqrt{\delta}$; $\omega_f(\delta)\leq\frac{\delta}{\sqrt{2a}}$; c) $\omega_f(\delta)\leq\delta\sqrt{2}$. **818.** $f(x)=\cos ax$ sau $f(x)=\operatorname{ch} ax$. **819.** $f(x)=\cos ax$; $g(x)=\pm\sin ax$ $(a=\text{const})$.

CAPITOLUL II

821. $\Delta x=999$; $\Delta y=3$. **822.** $\Delta x=-0{,}009$; $\Delta y=990\,000$. **823.** a) $\Delta y=a\Delta x$; b) $\Delta y=(2ax+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$; c) $\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1)$. **825.** a) 5; b) 4,1; c) 4,01; d) $4+\Delta x$; 4. **826.** $3+3h+h^2$. a) 3,31; b) 3,0301; c) 3,003001; 3. **827.** a) $v_{med}=215$ m/s; b) $v_{med}=210{,}5$ m/s; c) $v_{med}=210{,}05$ m/s; 210 m/s. **828.** a) $2x$; b) $3x^2$; c) $-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$; d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$; e) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x\neq 0)$; f) $\frac{1}{\cos^2 x}$ $\left(x\neq(2k-1)\frac{\pi}{2},\ k=0, \pm 1,\ldots\right)$; g) $-\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x\neq k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ldots)$; h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$; i) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$; j) $\frac{1}{1+x^2}$. **829.** -8; 0; 0. **830.** 4. **831.** $1+\frac{\pi}{4}$. **832.** $f'(a)$. **834.** $y'=1-2x$; 1, 0, -1, 21. **835.** $y'=x^2+x-2$; a) -2; 1; b) -1; 0; c) -4; 3. **836.** $10a^3x-5x^4$. **837.** $\frac{a}{a+b}$. **838.** $2x-(a+b)$. **839.** $2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9)$. **840.** $x\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$. **841.** $mn\,[x^{m-1}+x^{n-1}+(m+n)\,x^{m+n-1}]$. **842.** $-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$. **843.** $-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{9}{x^4}\right)$ $(x\neq 0)$. **845.** $\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$ $(|x|\neq 1)$. **846.** $\frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. **847.** $\frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$ $(|x|\neq 1)$. **848.** $\frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$ $(x\neq 1)$. **849.** $-\frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$ $(x\neq -1)$. **850.** $\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2]$ $(x\neq -1)$. **851.** $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x>0)$. **852.** $-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ $(x>0)$. **853.** $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x>0)$. **854.** $\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. **855.** $\frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$

$(x \neq \sqrt[3]{-3})$. **856.** $\frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$. **857.** $\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x| < |a|)$. **858.** $\frac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ $(|x| \neq 1)$. **859.** $-\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

860. $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ $(x>0)$. **861.** $\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(1+\sqrt[3]{x})^2}}\times$ $\times\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}}$ $(x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8)$. **862.** $-2\cos x(1+2\sin x)$. **863.** $x^2 \sin x$. **864.** $-\sin 2x \cdot \cos(\cos 2x)$. **865.** $n \sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x$. **866.** $\cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)]$. **867.** $\frac{2\sin x(\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^2 x^2}$ $(x^2 \neq k\pi;\ k=1, 2, \ldots)$. **868.** $-\frac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$ $(x \neq k\pi;\ k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **869.** $\frac{n \sin x}{\cos^{n+1} x}$ $\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi, k\text{—întreg}\right)$. **870.** $\frac{x^2}{(\cos x + x \sin x)^2}$. **871.** $\frac{2}{\sin^2 x}$; $(x \neq k\pi;\ k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **872.** $1+\operatorname{tg}^6 x\left(x \neq (2k+1)\times\frac{\pi}{2};\ k=0, \pm 1, \ldots\right)$. **873.** $-\frac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}}$ $(x \neq k\pi, k\text{—întreg})$.

874. $-\frac{16\cos\frac{2x}{a}}{a\sin^3\frac{2x}{a}}$ $\left(x \neq \frac{k\pi a}{2},\ k\text{—întreg}\right)$. **875.** $-2\operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x \times$ $\times \sin(2\operatorname{tg}^3 x)\cdot\cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k\text{—întreg}\right)$. **876.** $-2xe^{-x^2}$.

877. $-\frac{1}{x^2}2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\sec^2\frac{1}{x}\ln 2$. **878.** x^2e^x. **879.** $x^2e^{-x}\sin x$. **880.** $-\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$ $(x \neq 2k\pi,\ k\text{—întreg})$. **881.** $-\frac{1+\ln^2 3}{3^x}\sin x$.

882. $\sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin bx$. **883.** $e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$. **884.** $y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x}\right)$ $(x>0)$. **885.** $a^a \cdot x^{a^a-1} + ax^{a-1}a^{x^a}\ln a + a^x \cdot a^{a^x}\ln^2 a$. **886.** $\frac{x}{2}\lg e \cdot \lg^2 x^2$ $(x \neq 0)$. **887.** $\frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$ $(x>e)$. **888.** $\frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}$ $(x>e)$. **889.** $\frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)}$ $(x>-1)$. **890.** $\frac{x}{x^4-1}$ $(|x|>1)$. **891.** $\frac{1}{x(1+x^4)^2}$ $(x \neq 0)$. **892.** $\frac{1}{3x^2-2}$ $\left(|x|>\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **893.** $-\frac{2x^2}{(1-x^2)(1-kx^2)}$

$(|x|<1)$. **894.** $\frac{1}{2(x+1)(1+\sqrt{x+1})}$ $(x>-1)$. **895.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **896.** $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. **897.** $\ln^2(x+\sqrt{x^2+1})$. **898.** $\sqrt{x^2+a^2}$. **899.** $\frac{1}{a-bx^2}$ $\left(|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$. **900.** $-\frac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. **901.** $\frac{1}{\sin x}$ $(0<x-2k\pi<\pi, k\text{—întreg})$. **902.** $\frac{1}{\cos x}$ $\left(0<x-k\pi<\frac{\pi}{2}, k\text{—întreg}\right)$. **903.** $\operatorname{ctg}^3 x$ $(0<x-2k\pi<\pi,\ k\text{—întreg})$. **904.** $-\frac{1}{\cos x}$ $\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{—întreg}\right)$. **905.** $\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ $(0<x-2k\pi<\pi, k\text{—întreg})$. **906.** $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$. **907.** $-\frac{\ln^3 x}{x^2}$ $(x>0)$. **908.** $\frac{1}{x^5}\ln x$ $(x>0)$. **909.** $\frac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$. **910.** $-\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}$. **911.** $2\sin(\ln x)$ $(x>0)$. **912.** $-\sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x$ $\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\ k\text{—întreg}\right)$. **913.** $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ $(|x|<2)$. **914.** $\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ $(|x-1|<\sqrt{2})$. **915.** $\frac{2ax}{x^4+a^2}$ $(a \neq 0)$. **916.** $\frac{1}{x^2+2}$ $(x \neq 0)$. **917.** $\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$ $(x \geqq 0)$. **918.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x$ $(|x|<1)$. **919.** $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ $(x \geqq 0)$. **920.** $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$. **921.** $\operatorname{sgn}(\cos x)$ $\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi,\ k\text{—întreg}\right)$. **922.** $\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $(x \neq k\pi,\ k\text{—întreg})$. **923.** $\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$ $\left(0<x-k\pi<\frac{\pi}{2},\ k\text{—întreg}\right)$. **924.** $\frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<|x|<1)$. **925.** $\frac{1}{1+x^2}$ $(x \neq 1)$. **926.** 1 $\left(x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\text{—întreg}\right)$. **927.** $\frac{1}{a+b\cos x}$. **928.** $-\frac{2\operatorname{sgn} x}{1+x^2}$ $(x \neq 0)$. **929.** $\frac{4x}{\sqrt{1-x^4}\arccos^3(x^2)}$ $(|x|<1)$. **930.** $\frac{1+x^4}{1+x^6}$. **931.** $-2\cos x \cdot \operatorname{arctg}(\sin x)$. **932.** $\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$ $(x>1)$. **933.** $\frac{a^2+b^2}{(x+a)(x^2+b^2)}$ $(x>-a)$. **934.** $\sqrt{a^2-x^2}$. **935.** $\frac{1}{x^3+1}$ $(x \neq -1)$. **936.** $\frac{1}{x^4+1}$ $(|x| \neq 1)$. **937.** $(\arcsin x)^2$ $(|x|<1)$. **938.**

$-\frac{\arccos x}{x^2}$ $(0<|x|<1)$. **939.** $\frac{x \ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$ $(x>1)$. **940.** $\frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x|<1)$. **941.** $\frac{x^3}{x^6+1}$ $\left(|x| \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **942.** $\frac{12x^5}{(1+x^{12})^2}$. **943.** $-\frac{1}{(1-x)\sqrt[3]{x^2}}$ $(|x|<1)$. **944.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. **945.** $\frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$ $(0<x<a)$. **946.** $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ $(|x+1|<\sqrt{2})$. **947.** $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. **948.** $\frac{\sin 2x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$ $\left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi,\ k-\text{întreg}\right)$. **949.** $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ $(|x|<1)$. **950.** $\frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x$. **951.** $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. **952.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$. **953.** $\frac{\sin a \operatorname{sgn}(\cos x-\cos a)}{1-\cos a \cos x}$ $(\cos x \neq \cos a)$. **954.** $\frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}$ $(0<|x|<1)$. **955.** $\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$ $(|x| \neq 1)$. **956.** $\frac{4}{(1+x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$. **957.** $\frac{2x(\cos x^2+\sin x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$ $\left(0<|x|<\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi},\ k=0, 1, \ldots\right)$. **958.** $2x[\operatorname{sgn}(\cos x^2)+\operatorname{sgn}(\sin x^2)]$ $\left(|x| \neq \frac{k\pi}{2},\ k=0, 1, 2, \ldots\right)$. **959.** $\frac{2m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot e^{m(\arcsin x)} \cos m(\arcsin x)$ $(|x|<1)$. **960.** $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$. **961.** $1+x^x(1+\ln x)+x^x x^{x^x}\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$ $(x>0)$. **962.** $x^{a-1} x^{x^a}(1+a \ln x)+a^x x^{a^x}\left(\frac{1}{x}+\ln a \ln x\right)+x^x a^{x^x} \times$ $\times \ln a(1+\ln x)$ $(x>0)$. **963.** $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$ $(x>0)$. **964.** $(\sin x)^{1+\cos x} \times$ $\times(\operatorname{ctg}^2 x-\ln \sin x)-(\cos x)^{1+\sin x}(\operatorname{tg}^2 x-\ln \cos x)$ $\left(0<x-2k\pi<\frac{\pi}{2},\ k-\text{întreg}\right)$. **965.** $\frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}[x^2-2 \ln^2 x+x \ln x \cdot \ln(\ln x)]$ $(x>1)$. **966.** $-\frac{1}{x}(\log_x e)^2$ $(x>0,\ x \neq 1)$. **967.** $\operatorname{th}^3 x$. **968.** $-\frac{2}{\operatorname{sh}^3 x}$ $(x>0)$. **969.** $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. **970.** $\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$ $(x \neq 0)$. **971.** $\frac{a+b \operatorname{ch} x}{b+a \operatorname{ch} x}$. **972.** $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$. **973.** $-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \cdot \ln(\arccos x)$ $(|x|<1)$. **974.** $-\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. **975.** $-\frac{2xe^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$ $(x \neq 0)$. **976.** $\frac{4a^{2x} \ln a}{(1+a^{2x})^2} \operatorname{arcctg} a^{-x}$ $(a>0)$.

977. a) $\operatorname{sgn} x$ $(x \neq 0)$; b) $2|x|$; c) $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. **978.** a) $(x-1) \times$

$\times(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$; b) $\frac{3}{2} \sin 2x \cdot |\sin x|$; c) $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; d) $\pi[x] \sin 2\pi x$. **979.** $y'=-1$ pentru $-\infty<x<1$; $y'=2x-3$ pentru $1 \leqq x \leqq 2$; $y'=1$ pentru $2<x<+\infty$. **980.** $y'=2(x-a)(x-b) \times$ $\times(2x-a-b)$ pentru $x \in [a, b]$; $y'=0$ pentru $x \overline{\in} [a, b]$. **981.** $y'=1$ pentru $x<0$; $y'=\frac{1}{1+x}$ pentru $0 \leqq x<+\infty$. **982.** $y'=\frac{1}{1+x^2}$ pentru $|x| \leqq 1$; $y'=\frac{1}{2}$ pentru $|x|>1$. **983.** $y'=2xe^{-x^2}(1-x)$ pentru $|x| \leqq 1$; $y'=0$ pentru $|x|>1$. **984.** a) $\frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$; b) $\frac{54-36x-4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$ $(x \neq 0,\ x \neq 1,\ x \neq \pm 3)$; c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{x-a_i}$; d) $\frac{n}{\sqrt{1+x^2}}$. **985.** a) $\frac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$ $(\varphi^2(x)+\psi^2(x) \neq 0)$; b) $\frac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$ $(\varphi^2(x)+\psi^2(x) \neq 0)$; c) $\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}\left\{\frac{1}{\varphi(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x)\right\}$; d) $\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln \varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)}$. **986.** a) $2xf'(x^2)$; b) $\sin 2x \times$ $\times[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$; c) $e^{f(x)}[e^x f'(e^x)+f'(x) f(e^x)]$; d) $f'(x) \times$ $+f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}$. **988.** $3x^2+15$. **989.** $6x^2$. **992.** a) $n>0$; b) $n>1$; c) $n>2$. **993.** a) $n \geqq m+1$; b) $1<n<m+1$. **994.** $\varphi(a)$. **995.** $f'_-(a)=-\varphi(a)$, $f'_+(a)=\varphi(a)$. **999.** Nu este derivabilă pentru $x=1$; b) nu este derivabilă pentru $x=\frac{2k-1}{2}\pi$, k număr întreg; c) este derivabilă peste tot; d) nu este derivabilă pentru $x=k\pi$, k număr întreg; e) nu este derivabilă pentru $x=-1$. **1000.** $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\operatorname{sgn} x$ pentru $x \neq 0$ şi $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **1001.** $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\pi[x] \cos \pi x$ pentru $x \neq$ număr întreg; $f'_-(k)=\pi(k-1) \times$ $\times(-1)^k$, $f'_+(k)=\pi k(-1)^k$ pentru k întreg. **1002.** $f'_-(x)=f'_+(x)=$ $=\left(\cos \frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x}\right) \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{\pi}{x}\right)$ pentru $x \neq \frac{2}{2k+1}$ $(k-\text{întreg})$; $f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=(2k+1)\frac{\pi}{2}$. **1003.** $f'_-(x)=$ $=f'_+(x)=\frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$ pentru $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$; $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$; $f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi})=\mp\infty$, $f'_\pm(\sqrt{2k\pi})=\pm\infty$ $(k=1, 2, \ldots)$. **1004.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$ pentru $x \neq 0$;

$f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$. **1005.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ pentru $x\neq 0$; $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$. **1006.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\dfrac{\varepsilon}{x}$, unde $\varepsilon=-1$; pentru $0<|x|<1$ şi $\varepsilon=1$ pentru $1<|x|<+\infty$; $f'_-(\mp 1)=-1$, $f'_+(\mp 1)=1$. **1007.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\dfrac{2\operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$ pentru $x\neq\mp 1$; $f'_-(\mp 1)=\mp 1$, $f'_+(\mp 1)=\pm 1$. **1008.** $f'_-(x)=f'_+(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x-2}{(x-2)^2+1}$ pentru $x\neq 2$; $f'_{\mp}(2)=\mp\dfrac{\pi}{2}$. **1010.** $a=2x_0$; $b=-x_0^2$. **1011.** $a=f'_-(x_0)$; $b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$. **1012.** $A=\dfrac{k_1+k_2}{(b-a)^2}$, $c=\dfrac{ak_2+bk_1}{k_1+k_2}$. **1013.** $a=\dfrac{3m^2}{2c}$, $b=-\dfrac{m_2}{2c^3}$. **1014.** a) Poate; b) nu poate. **1015.** a) Nu poate; b) nu poate. **1016.** a), b), c) funcţia $F(x)$ poate să aibă o derivată $F'(x)$ şi poate să nu aibă. **1017.** $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **1018.** Nu poate; b) poate. **1019.** 1) Nu rezultă neapărat; 2) rezultă neapărat. **1020.** Nu rezultă neapărat. **1021.** Nu rezultă. **1022.** Nu rezultă. **1023.** In general, nu este posibil. **1024.** $P_n=\dfrac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$; $Q_n=\dfrac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-nx^{n+2}}{(1-x)^3}$.

1025. $S_n=\dfrac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$; $T_n=\dfrac{n\sin\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{2n+1}{2}x-\sin^2\dfrac{nx}{2}}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

1026. $S_n=\dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$. **1029.** 40π cm²/s. **1030.** 25 m²/s; 0,4 m/s. **1031.** 50 km/h. **1032.** $S(x)=\dfrac{x^2}{2}$, dacă $0\leq x\leq 2$; $S(x)=x^2-2x+2$, dacă $x>2$; $S'(x)=x$, dacă $0\leq x\leq 2$; $S'(x)=2x-2$, dacă $x>2$. **1033.** $S(x)=\dfrac{|x|}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{|x|}{a}$; $S'(x)=\sqrt{a^2-x^2}\operatorname{sgn}x$ $(0<|x|\leq a)$. **1034.** $y'_x=\dfrac{1}{3(y^2+1)}$. **1035.** $y'_x=\dfrac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. **1036.** a) $-\infty<y<+\infty$; $x'_y=\dfrac{x}{x+1}$; b) $-\infty<y<+\infty$, $x'_y=\dfrac{1}{1-x+y}$; c) $-\infty<y<+\infty$, $x'_y=\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$; d) $-1<y<1$, $x'_y=\dfrac{1}{1-y^2}$. **1037.** a) $x_1=-\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(-\infty<y\leq 1)$; $x_2=-\sqrt{1-\sqrt{1-y}}$ $(0\leq y\leq 1)$; $x_3=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$ $(0\leq y\leq 1)$; $x_4=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}$

$(-\infty<y\leq 1)$; $x'_i=\dfrac{1}{4x(1-x^2)}$ $(i=1, 2, 3, 4)$. b) $x_1=-\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$ $(0\leq y<1)$; $x_2=\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$ $(0\leq y<1)$; $x'_i=\dfrac{x^3}{2y^2}$ $(i=1, 2)$; c) $x_1=-\ln(1+\sqrt{1-y})$ $(-\infty<y\leq 1)$; $x_2=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-y}}{y}$ $(0<y\leq 1)$; $x'_i=-\dfrac{1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$ $(i=1, 2)$. **1038.** $y'_x=-\dfrac{3}{2}(1+t)$; -3; $-\dfrac{3}{2}$ şi $-\dfrac{9}{2}$; $(-4, 4)$. **1039.** $\sqrt[6]{\dfrac{(1-\sqrt{t})^2}{t(1-\sqrt[3]{t})^3}}$ $(t>0, t\neq 1)$. **1040.** $y'_x=-1$ $(0<x<1)$. **1041.** $y'_x=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg}t$ $(0<|t|<\pi)$. **1042.** $y'_x=\dfrac{b}{a}\operatorname{cth}t$ $(|t|>0)$. **1043.** $y'_x=-\dfrac{b}{a}\operatorname{tg}t\left(0\leq|t|\leq\pi,\ t\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$. **1044.** $y'_x=\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$ ($t\neq 2k\pi$, k — întreg). **1045.** $y'_x=\operatorname{tg}\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$ $\left(t\neq\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k \text{ — întreg}\right)$. **1046.** $y'_x=\operatorname{sgn}t$ $(0<|t|<+\infty)$. **1048.** $y'=\dfrac{1-x-y}{x-y}$; 0, $-\dfrac{1}{2}$. **1049.** $\dfrac{p}{y}$. **1050.** $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$. **1051.** $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$. **1052.** $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. **1053.** $\dfrac{x+y}{x-y}$. **1054.** a) $\operatorname{tg}(\varphi+\operatorname{arctg}\varphi)$; b) $-\operatorname{ctg}\dfrac{3\varphi}{2}\left(\varphi\neq 0,\ \varphi\neq\pm\dfrac{2\pi}{3}\right)$. c) $\operatorname{tg}\left(\varphi+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{m}\right)$.

1055. a) $y=\sqrt[3]{4}(x+1)$: $y=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1)$; b) $y=3$, $x=2$; c) $x=3$, $y=0$. **1056.** a) $\left(\dfrac{1}{2}, 2\dfrac{1}{4}\right)$; b) $(0, 2)$. **1058.** $|x|<\dfrac{\pi}{3}$ şi $\dfrac{2\pi}{3}<|x|\leq\pi$. **1059.** $\max|y'_1-y'|=10\pi\approx 31{,}4$. **1060.** $\dfrac{\pi}{4}$. **1061.** $\dfrac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}\approx$ $\approx$ arc 37°. **1062.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}\approx$ arc 70°30′. **1063.** $n>57{,}3$. **1064.** a) $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{|a|}$; b) $\dfrac{\pi}{2}$. **1066.** $\left|\dfrac{x}{n}\right|$. **1069.** $\dfrac{y_0^2}{a}$. **1071.** $b^2-4ac=0$. **1072.** $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+\left(\dfrac{q}{2}\right)^2=0$. **1073.** $a=\dfrac{1}{2e}$. **1077.** a) $3x-2y=0$, $2x+3y=0$; b) $3x-y-1=0$, $x+3y-7=0$. **1078.** a) $y=x$, $y=-x$; b) $3x-y-4=0$, $x+3y-3=0$; c) $y=-x$, $y=x$. **1079.** $y-2a=(x-at_0)\operatorname{ctg}\dfrac{t_0}{2}$. Tangenta la cicloidă este perpendiculară pe segmentul care uneşte punctul de tangenţă cu punctul de contact al cercului care se rostogoleşte. **1081.** $3x+5y-50=0$, $5x-3y-10{,}8=0$. **1082.** $x+2y-3=0$, $2x-y-1=0$. **1083.** $\Delta f(1)=\Delta x+3(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; $df(1)=\Delta x$. a) 5, 1; b) 0,131, 0,1; c) 0,010301, 0,01. **1084.** $\Delta x=20\Delta t+5(\Delta t)^2$, $dx=20\Delta t$; a) 25 m, 20 m; b) 2,05 m, 2 m;

c) 0,020005 m, 0,02 m. **1085.** $-\frac{dx}{x^2}$ $(x\neq 0)$. **1086.** $\frac{dx}{a^2+x^2}$. **1087.** $\frac{dx}{x^2-a^2}$ $(|x|\neq|a|)$. **1088.** $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. **1089.** $\frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ $(|x|<|a|)$. **1090.** a) $(1+x)e^x\,dx$; b) $x\sin x\,dx$; c) $-\frac{3\,dx}{x^4}$ $(x\neq 0)$; d) $\frac{2-\ln x}{x\sqrt{x}}\,dx$ $(x>0)$; e) $\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$; f) $\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(|x|<1)$; g) $-\frac{2x\,dx}{1-x^2}$ $(|x|<1)$; h) $\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(|x|>1)$; i) $\frac{dx}{\cos^3 x}$ $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\text{—întreg}\right)$.

1091. $vw\,du+uw\,dv+uv\,dw$. **1092.** $\frac{v\,du-2u\,dv}{v^3}$ $(v\neq 0)$. **1093.** $-\frac{u\,du+v\,dv}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(u^2+v^2>0)$. **1094.** $\frac{v\,du-u\,dv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1095.** $\frac{u\,du+v\,dv}{u^2+v^2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1096.** a) $1-4x^3-3x^6$; b) $\frac{1}{2}\left(\cos x-\frac{\sin x}{x}\right)$, c) $-\operatorname{ctg} x$ $(x\neq k\pi,\ k\text{—întreg})$; d) $-\operatorname{tg}^2 x\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\text{ — întreg}\right)$; e) -1 $(|x|<1)$. **1097.** a) Se măreşte cu 104,7 cm²; b) se micşorează cu 43,6 cm². **1098.** Trebuie mărită cu 2,23 cm. **1099.** 1,007 (din tabele: 1,006 6). **1100.** 0,484 9 (din tabele: 0,484 8). **1101.** —0,874 7 (din tabele: —0,874 6). **1102.** 0,810 4 = arc 46°26′ (din tabele: arc 46°24′). **1103.** 1,043 (din tabele: 1,041). **1104.** a) 2,25 (din tabele: 2,24); b) 5,833 (din tabele: 5,831); c) 10,954 6 (din tabele: 10,954 5). **1105.** a) 2,083 (din tabele: 2,080); b) 2,990 7 (din tabele: 2,990 5): c) 1,938 (din tabele: 1,931); d) 1,995 4 (din tabele: 1,995 3). **1106.** 0,24 m²; 4,2%. **1107.** $\delta_R\leqq 0{,}33\%$. **1108.** a) $\delta_g=\delta_l$; b) $\delta_g=2\delta_T$. **1109.** $0{,}43\,\delta$. **1111.** $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **1112.** $\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ $(|x|<1)$. **1113.** $2e^{-x^2}(2x^2-1)$. **1114.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\left(x\neq\frac{2k+1}{2}\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ldots\right)$. **1115.** $\frac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg} x$. **1116.** $\frac{3x}{(1+x^2)^2}+\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ $(|x|<1)$. **1117.** $\frac{1}{x}$ $(x>0)$. **1118.** $\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)}$ $(f(x)>0)$. **1119.** $-\frac{2}{x}\sin(\ln x)$ $(x>0)$. **1120.** $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=0$. **1121.** $2(uu''+u'^2)$. **1122.** $\frac{uu''-u'^2}{u^2}-\frac{vv''-v'^2}{v^2}$ $(uv>0)$. **1123.**

$\frac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(u^2+v^2>0)$. **1124.** $y''=u^v\left[\left(v\frac{u'}{u}+v'\ln u\right)^2+v\,\frac{uu''-u'^2}{u^2}+\frac{2u'v'}{u}+v''\ln u\right]$. **1125.** $y''=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)$; $y'''=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2)$. **1126.** $y''=\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right)$; $y'''=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)$. **1127.** $y''=e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$; $y'''=e^{3x}f'''(e^x)+3e^{2x}f''(e^x)+e^xf'(e^x)$. **1128.** $y''=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$; $y'''=\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$. **1129.** $y''=\varphi'^2(x)f''(\varphi(x))+\varphi''(x)f'(\varphi(x))$; $y'''=\varphi'^3(x)f'''(\varphi(x))+3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x))+\varphi'''(x)f'(\varphi(x))$. **1130.** a) $e^x\,dx^2$; b) $e^x(dx^2+d^2x)$. **1131.** $\frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. **1132.** $\frac{2\ln x-3}{x^3}\,dx^2$ $(x>0)$. **1133.** $x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]dx^2$. **1134.** $u\,d^2v+2\,du\,dv+v\,d^2u$. **1135.** $\frac{(v\,d^2u-u\,d^2v)-2\,dv\,(v\,du-u\,dv)}{v^3}$ $(v>0)$. **1136.** $u^{m-2}v^{n-2}\{[m(m-1)v^2\,du^2+2mnuv\,du\,dv+n(n-1)u^2\,dv^2]+uv(mv\,d^2u+nu\,d^2v)\}$. **1137.** $a^u\ln a\,(du^2\ln a+d^2u)$ $(a>0)$. **1138.** $[(v^2-u^2)\,du^2-4uv\,du\,dv+(u^2-v^2)\,dv^2+(u^2+v^2)(u\,d^2u+v\,d^2v)](u^2+v^2)^{-2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1139.** $[-2uv\,du^2+2(u^2-v^2)\,du\,dv+2uv\,dv^2+(u^2+v^2)(v\,d^2u-u\,d^2v)](u^2+v^2)^{-2}$ $(u^2+v^2>0)$. **1140.** $y''=\frac{3}{4(1-t)}$; $y'''=\frac{3}{8(1-t)^3}$ $(t\neq 1)$. **1141.** $y''=-\frac{1}{a\sin^3 t}$; $y'''=-\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$ $(t\neq k\pi,\ k\text{—întreg})$.

1142. $y''=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$; $y'''=\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$ $(t\neq 2k\pi,\ k\text{— întreg})$.

1143. $y''=\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$, $y'''=\frac{e^{-2t}(2\sin t+\cos t)}{\sqrt{2}\cos^5\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}$ $\left(t\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ldots\right)$. **1144.** $y''=\frac{1}{f''(t)}$; $y'''=-\frac{f'''(t)}{f''^3(t)}$ $(f''(t)\neq 0)$. **1145.** $x'=\frac{1}{y'}$; $x''=-\frac{y''}{y'^3}$; $x'''=-\frac{y'y'''-3y''^2}{y'^5}$; $x^{IV}=-\frac{y'^2y^{IV}-10y'y''y'''+15y''^3}{y'^7}$ $(y'\neq 0)$. **1146.** $-\frac{x}{y}$, $-\frac{25}{y^3}$, $-\frac{75x}{y^5}$; $-\frac{3}{4}$, $-\frac{25}{64}$, $-\frac{225}{1024}$. **1147.** $\frac{p}{y}$,

$-\frac{p^2}{y^3}$, $\frac{3p^3}{y^5}$. **1148.** $y'=\frac{2x-y}{x-2y}$, $y''=\frac{6}{(x-2y)^3}$, $y'''=\frac{54x}{(x-2y)^5}$. **1149.** $y'=\frac{2x^3y}{1+y^2}$; $y''=\frac{2x^2y}{(1+y^2)^3}[3(1+y^2)^2+2x^4(1-y^2)]$. **1150.** $y'=\frac{x+y}{x-y}$; $y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **1151.** $a=\frac{1}{2}f''(x_0)$; $b=f'(x_0)$; $c=f(x_0)$. **1152.** $20-10t$, -10; 0, -10. **1153.** $v=-\frac{2\pi a}{T}\sin\frac{2\pi}{T}t$; $j=-\frac{4\pi^2a}{T^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$. **1154.** $x=v_0t\cos\alpha$, $y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$; $v=\sqrt{v_0^2-2v_0gt\sin\alpha+g^2t^2}$, $j=g$, $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$; $\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$; $\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. **1155.** $x^2+y^2=25$; $5|\omega|$, $5\omega^2$. **1156.** $y^{(6)}=4\cdot 6!$; $y^{(7)}=0$. **1157.** $y'''=-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$ $(x\neq 0)$. **1158.** $y^{(10)}=-\frac{17!!}{2^{10}x^9\sqrt{x}}$ $(x>0)$, unde $n!!$ înseamnă produsul numerelor naturale de aceeaşi paritate care nu depăşesc numărul n, adică $17!!=1\cdot 3\cdot 5\ldots 17$. **1159.** $y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}$ $(x\neq 1)$. **1160.** $y^{(100)}=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$ $(x<1)$. **1161.** $y^{(20)}=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$. **1162.** $y^{(10)}=e^x\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$, unde $A_{10}^i=10\cdot 9\cdot\ldots(11-i)$ şi $A_{10}^0=1$. **1163.** $y^{(5)}=-\frac{6}{x^4}$ $(x>0)$. **1164.** $y^{(5)}=\frac{274}{x^6}-\frac{120}{x^6}\ln x$ $(x>0)$. **1165.** $y^{(50)}=2^{50}\left(-x^2\sin 2x+50x\cos 2x+\frac{1225}{2}\sin 2x\right)$. **1166.** $y'''=\frac{27(1-3x)^2-36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}}\sin 3x-\frac{27(1-3x)^2-28}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}}\cos 3x\left(x\neq\frac{1}{3}\right)$. **1167.** $y^{(10)}=-2^8\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x$. **1168.** $y^{(100)}=x\operatorname{sh}x+100\operatorname{ch}x$. **1169.** $y^{IY}=-4e^x\cos x$. **1170.** $y^{(6)}=-\frac{60}{x^6}+\left(\frac{144}{x^5}-\frac{160}{x^3}+\frac{96}{x}\right)\sin 2x+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cos 2x$. **1171.** $120\,dx^5$. **1172.** $-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}dx^3$ $(x>0)$. **1173.** $-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)\,dx^{10}$. **1174.** $e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$. **1175.** $8\sin x\operatorname{sh}x\,dx^6$. **1176.** $2u\,d^{10}u+20\,du\,d^9u+90\,d^2u\,d^6u+240\,d^3u\,d^7u+420\,d^4u\,d^6u+252(d^5u)^2$. **1177.** $e^u(du^4+6\,du^2d^2u+4\,du\,d^3u+3\,d^2u^2+d^4u)$. **1178.** $\frac{2\,du^3}{u^3}-\frac{3\,du\,d^2u}{u^2}+\frac{d^3u}{u}$. **1179.** $d^2y=y''dx^2+y'd^2x$; $d^3y=y'''dx^3+3y''dxd^2x+y'd^3x$; $d^4y=y^{IV}dx^4+6y'''dx^2d^2x+4y''dx\,d^3x+3y''d^2x^2+y'd^4x$. **1180.** $y''=\frac{\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^3}$; $y'''=\frac{dx\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^3x & d^3y\end{vmatrix}-3d^2x\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^5}$. **1187.** $P^{(n)}(x)=a_0n!$ **1188.** $\frac{(-1)^{n-1}n!\,c^{n-1}(ad-bc)}{(cx+d)^{n+1}}$. **1189.** $n!\left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}+\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]$. **1190.** $(-1)^nn!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$. **1191.** $\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}}\left(x<\frac{1}{2}\right)$. **1192.** $\frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\ldots(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$ $(n\geq 2;\ x\neq -1)$. **1193.** $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1194.** $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1195.** $\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1196.** $\frac{3}{4}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{3^n}{4}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1197.** $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1198.** $\frac{(a-b)^n}{2}\cos\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\cos\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1199.** $\frac{(a-b)^n}{2}\sin\left[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]+\frac{(a+b)^n}{2}\sin\left[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1200.** $\frac{b^n}{2}\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{(2a-b)^n}{4}\cos\left[(2a-b)x+\frac{n\pi}{2}\right]-\frac{(2a+b)^n}{4}\cos\left[(2a+b)x+\frac{n\pi}{2}\right]$. **1201.** $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1202.** $a^nx\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)+na^{n-1}\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1203.** $a^n\left[x^2-\frac{n(n-1)}{a^2}\right]\sin\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)-2na^{n-1}x\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1204.** $(-1)^ne^{-x}[x^2-2(n-1)x+(n-1)(n-2)]$. **1205.** $e^x\left\{\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}$. **1206.** $e^x2^{\frac{n}{2}}\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1207.** $e^x2^{\frac{n}{2}}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$. **1208.** $\frac{(n-1)!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}[(a+bx)^n+(-1)^{n-1}(a-bx)^n]$ $\left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right)$. **1209.** $e^{ax}[a^nP(x)+C_n^1a^{n-1}P'(x)+\ldots+P^{(n)}(x)]$.

1210. $\frac{1}{2}\{[(x+n)-(-1)^n(x-n)]\operatorname{ch}x+[(x+n)+(-1)^n(x-n)]\operatorname{sh}x\}$. **1211.** $d^ny=e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\ldots+n!\right]dx^n$. **1212.** $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left\{\ln x-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right\}dx^n\ (x>0)$. **1214.** a) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\cos n\varphi\times\operatorname{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)+\sin n\varphi\operatorname{sh}ax\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$; b) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\times\left[\cos n\varphi\operatorname{ch}ax\sin\left(bx+\frac{\pi n}{2}\right)-\sin n\varphi\operatorname{sh}ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$; c) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[\sin n\varphi\operatorname{ch}ax\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)+\cos n\varphi\operatorname{sh}ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$; d) $(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\left[-\sin n\varphi\operatorname{ch}ax\cos\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)+\cos n\varphi\operatorname{sh}ax\sin\left(bx+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$, unde $\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **1215** $f^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^nC_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$.

1216. a) $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p+k}\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}C_{2p+1}^k\sin\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]$; b) $\sum_{k=0}^{p-1}2^{n-2p+1}(p-k)^nC_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n\pi}{2}\right]$; c) $\sum_{k=0}^{p}\left\{\frac{(2p-2k+1)^n}{2^{2p}}\times C_{2p+1}^k\cos\left[(2p-2k+1)x+\frac{n\pi}{2}\right]\right\}$. **1218.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\times\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)\ (x>0)$. **1219.** a) $\frac{(-1)^n n!}{3}(2^n+1)$; b) $\frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}}\ (n>1)$.

1220. a) $n(n-1)a^{n-2}$; b) $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!\ (k=0,1,2,\ldots)$; c) $f^{(2k)}(0)=0$, $f^{(2k+1)}(0)=[1\cdot3\ldots(2k-1)]^2\ (k=0,1,2,\ldots)$. **1221.** a) $f^{(2k)}(0)=(-1)^km^2(m^2-2^2)\ldots[m^2-(2k-2)^2]$, $f^{(2k-1)}(0)=0$; b) $f^{(2k)}(0)=0$, $f'(0)=m$, $f^{(2k+1)}(0)=m(m^2-1^2)\ldots[m^2-(2k-1)^2]$; $k=1,2,\ldots$. **1222.** a) $f^{(2k)}(0)=(-1)^{k-1}\cdot2(2k-1)!\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}\right)$, $f^{(2k-1)}(0)=0\ (k=1,2,\ldots)$; b) $f^{(2k)}(0)=2^{2k-1}[(k-1)!]^2$, $f^{(2k-1)}(0)=0\ (k=1,2,\ldots)$. **1223.** $n!\varphi(a)$. **1228.** $L_m(x)=(-1)^m\left[x^m-m^2x^{m-1}+\frac{m^2(m-1)^2}{1\cdot2}x^{m-2}+\ldots+(-1)^mm!\right]$.

1231. $H_m(x)=(2x)^m-\frac{m(m-1)}{1!}(2x)^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!}(2x)^{m-4}-\ldots$

1236. Pentru $x=0$ nu avem o derivată finită $f'(x)$. **1244.** $A(-1,-1)$, $C(1,1)$. **1245.** Nu este valabilă. **1246.** a) $\theta=\frac{1}{2}$; b) $\theta=\frac{\sqrt{x^2+x\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2}-x}{\Delta x}\ (x>0)$; c) $\theta=\frac{x}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x}}+1\right)$ $(x(x+\Delta x)>0)$; d) $\theta=\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$. **1248.** $c=\frac{1}{2}$ sau $\sqrt{2}$. **1250.** In general, nu. **1261.** $f(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}$, unde $c_i\ (i=0,1,\ldots,n-1)$ sînt constante. **1268.** Pentru $-\infty<x<\frac{1}{2}$ funcţia este crescătoare; pentru $\frac{1}{2}<x<+\infty$ funcţia este descrescătoare. **1269.** Pentru $-\infty<x<-1$ funcţia este descrescătoare; pentru $-1<x<1$ funcţia este crescătoare; pentru $1<x<+\infty$ funcţia este descrescătoare. **1270.** Pentru $-\infty<x<-1$ funcţia este descrescătoare; pentru $-1<x<1$ funcţia este crescătoare; pentru $1<x<+\infty$ funcţia este descrescătoare. **1271.** Pentru $0<x<100$ funcţia este crescătoare; pentru $100<x<+\infty$ funcţia este descrescătoare. **1272.** Funcţia este crescătoare. **1273.** In intervalele $\left(\frac{k\pi}{2},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ funcţia este crescătoare; în intervalele $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3},\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ funcţia este descrescătoare $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **1274.** In intervalele $\left(\frac{1}{2k+1},\frac{1}{2k}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{2k+1},-\frac{1}{2k+2}\right)$ funcţia este crescătoare; în intervalele $\left(\frac{1}{2k+2},\frac{1}{2k+1}\right)$ şi $\left(-\frac{1}{2k},-\frac{1}{2k+1}\right)$ funcţia este descrescătoare $(k=0,1,2,\ldots)$. **1275.** Pentru $-\infty<x<0$ funcţia este descrescătoare; pentru $0<x<\frac{2}{\ln 2}$ funcţia este crescătoare; pentru $\frac{2}{\ln 2}<x<+\infty$ funcţia este descrescătoare. **1276.** Pentru $0<x<n$ funcţia este crescătoare; pentru $n<x<+\infty$ este descrescătoare. **1277.** Funcţia este descrescătoare pentru $-\infty<x<-1$ şi $0<x<1$; crescătoare pentru $-1<x<0$ şi $1<x<+\infty$. **1278.** In intervalele $\left(e^{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi},e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi}\right)$ funcţia este crescătoare; în intervalele $\left(e^{\frac{13\pi}{12}+2k\pi},e^{\frac{17\pi}{12}+2k\pi}\right)$

funcţia este descrescătoare ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **1283.** Nu neapărat. **1298.** In punctul A curba are concavitatea în sus; în punctul B are concavitatea în jos; C este un punct de inflexiune. **1299.** Graficul are pentru $-\infty < x < 1$ concavitatea în sus; pentru $1 < x < +\infty$ concavitatea în jos; $x=1$ este un punct de inflexiune. **1300.** Pentru $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ concavitatea este în jos; pentru $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$, în sus; $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ sînt puncte de inflexiune. **1301.** Pentru $x < 0$ concavitatea în jos; pentru $x > 0$ concavitatea în sus; $x=0$ este un punct de inflexiune. **1302.** Concavitatea în sus. **1303.** Pentru $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ concavitatea în jos; pentru $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ concavitatea în sus; $x=k\pi$ sînt puncte de inflexiune ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **1304.** Pentru $|x| < \sqrt{\frac{1}{2}}$ concavitatea în jos; pentru $|x| > \sqrt{\frac{1}{2}}$ concavitatea în sus; $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ sînt puncte de inflexiune. **1305.** Pentru $|x| < 1$ concavitatea în sus; pentru $|x| > 1$ concavitatea în jos; $x = \pm 1$ sînt puncte de inflexiune. **1306.** Pentru $e^{2k\pi - \frac{3\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ concavitatea în sus; pentru $e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}$ concavitatea în jos; $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$ sînt puncte de inflexiune ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **1307.** Concavitatea în sus pentru $0 < x < +\infty$. **1309.** $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. **1310.** Concavitatea în jos (pentru $a > 0$). **1318.** $\frac{a}{b}$. **1319.** 1. **1320.** 2. **1321.** -2. **1322.** $\frac{1}{3}$. **1323.** $-\frac{1}{3}$. **1324.** $\frac{1}{3}$. **1325.** $\frac{1}{6}$. **1326.** $\frac{1}{2}$. **1327.** 1. **1328.** $\frac{a-b}{3ab}$. **1329.** $\frac{1}{6} \ln a$. **1330.** -2. **1331.** 1. **1332.** $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **1333.** $\frac{1}{6}$. **1334.** $\frac{2}{3}$. **1335.** 1. **1336.** 0. **1337.** 0. **1338.** 0. **1339.** 0. **1340.** 0. **1341.** 0. **1342.** 1. **1343.** 1. **1344.** -1. **1345.** e^k. **1346.** e^{-1}. **1347.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **1348.** e^{-1}. **1349.** 1. **1350.** 1. **1351.** 1. **1352.** $e^{\frac{2}{\sin 2a}}$ $\left(a \neq \frac{k\pi}{2}, k - \text{întreg}\right)$. **1353.** $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$. **1354.** $\frac{1}{2}$. **1355.** $\frac{1}{2}$. **1356.** 0. **1357.** $-\frac{1}{2}$. **1358.** $a^a(\ln a - 1)$. **1359.** $-\frac{e}{2}$. **1360.** $\frac{1}{a}$. **1361.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **1362.** 1. **1363.** $e^{\frac{1}{6}}$. **1364.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **1365.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **1366.** e^{-1}. **1367.** $\frac{mn}{n-m}$. **1368.** $\sqrt{e}$. **1369.** $-\frac{1}{6}$. **1370.** a. **1371.** $\operatorname{tg}\alpha$. **1374.** a) Regula lui l'Hospital nu poate fi aplicată, limita este 0; b) regula lui l'Hospital nu poate fi aplicată, limita este 1; c) aplicarea formală a regulii lui l'Hospital conduce la un rezultat fals, anume limita este zero; limita nu există; d) nu poate fi aplicată regula lui l'Hospital, ea conduce la un rezultat fals şi anume că limita este zero; limita nu există. **1375.** $\frac{4}{3}$. **1376.** $5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$. **1377.** $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$; $-\frac{1}{12}$. **1378.** $1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2)$. **1379.** $a + \frac{x}{ma^{m-1}} - \frac{(m-1)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2)$. **1380.** $\frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3)$. **1381.** $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$. **1382.** $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$. **1383.** $x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13})$. **1384.** $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$. **1385.** $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. **1386.** $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$. **1387.** $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6)$. **1388.** $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$. **1389.** $(x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$. **1390.** $y = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2)$. **1391.** $\frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. **1392.** $\ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{nx^n} + o(h^n)$. **1394.** a) Este mai mică decît $\frac{3}{(n+1)!}$; b) nu depăşeşte $\frac{1}{3840}$; c) este mai mică decît $2 \cdot 10^{-6}$; d) este mai mică decît $\frac{1}{16}$. **1395.** $|x| < 0{,}222 = \text{arc } 12°30'$. **1396.** a) 3,1072; b) 3,0171; c) 1,9960; d) 1,64872; e) 0,309017; f) 0,182321; g) 0,67474 = arc 38°39′35″; h) 0,46676 = arc 26°44′37″; i) 1,12117. **1397.** a) 2,718281828; b) 0,01745241; c) 0,98769; d) 2,2361; e) 1,04139. **1398.** $-\frac{1}{12}$. **1399.** $\frac{1}{3}$. **1400.** $-\frac{1}{4}$. **1401.** $\frac{1}{3}$. **1402.** $\frac{1}{6}$. **1403.** $\ln^2 a$. **1404.** $\frac{1}{2}$. **1405.** 0. **1406.** $\frac{1}{3}$. **1407.** $\frac{x^7}{30}$. **1408.** x^2. **1409.** $\frac{x}{2}$. **1410.** $a = \frac{4}{3}$; $b = -\frac{1}{3}$. **1411.**

a) $\frac{2x}{R^3}$; b) $\frac{4}{3}x$; c) $\frac{An}{100}$; d) $\frac{70}{x}$. **1412.** $\alpha=\frac{2}{3}$; $\beta=\frac{1}{3}$. **1413.** $\frac{\alpha^4}{180}$, unde α este jumătatea unghiului la centru al arcului. **1414.** Avem un maxim $y=2\frac{1}{4}$ pentru $x=\frac{1}{2}$. **1415.** Nu există extremum. **1416.** Avem un minim $y=0$ pentru $x=1$. **1417.** Avem un minim $y=0$ pentru $x=0$, dacă m este par, nu avem extremum pentru $x=0$ dacă m este impar; funcţia are un maxim $y=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ pentru $x=\frac{m}{m+n}$; minim $y=0$ pentru $x=1$ dacă n este par, n-are extremum pentru $x=1$ dacă n este impar. **1418.** Funcţia are un minim $y=2$ pentru $x=0$. **1419.** Funcţia are un minim $y=0$ pentru $x=-1$; un maxim $y=10^{10}e^{-9}\approx 1\,234\,000$ pentru $x=9$. **1420.** Funcţia are un maxim $y=1$ pentru $x=0$ dacă n este impar şi n-are extremum pentru $x=0$ dacă n este par. **1421.** Funcţia are un minim $y=0$ pentru $x=0$. **1422.** Funcţia are un maxim $y=\frac{1}{3}\times\sqrt[3]{4}\approx 0{,}529$ pentru $x=\frac{1}{3}$; un minim $y=0$ pentru $x=1$; n-are extremum pentru $x=0$. **1423.** Avem un minim $f(x_0)=0$ dacă $\varphi(x_0)>0$ şi n este par; un maxim $f(x_0)=0$ dacă $\varphi(x_0)<0$ şi n este par; $f(x_0)$ nu este extremum dacă n este impar. **1425.** Nu. **1427.** a) Un minim $f(0)=0$; b) un minim $f(0)=0$. **1428.** Un minim $f(0)=0$. **1429.** Pentru $x=1$ avem un maxim $y=0$; pentru $x=3$, avem un minim $y=-4$. **1430.** Funcţia are un minim $y=0$ pentru $x=0$; un maxim $y=1$ pentru $x=\pm 1$. **1431.** Pentru $x=\frac{5-\sqrt{13}}{6}\approx 0{,}23$ funcţia are un minim $y\approx -0{,}76$; pentru $x=1$, un maxim $y=0$; pentru $x=\frac{5+\sqrt{13}}{6}\approx 1{,}43$ avem un minim $y\approx -0{,}05$; pentru $x=2$ n-avem extremum. **1432.** Pentru $x=-1$ avem un maxim $y=-2$; pentru $x=1$, un minim $y=2$. **1433.** Pentru $x=-1$ avem un minim $y=-1$; pentru $x=1$ avem un maxim $y=1$. **1434.** Pentru $x=\frac{7}{5}$ avem un minim $y=-\frac{1}{24}$. **1435.** Pentru $x=0$ şi $x=2$ avem un minim marginal $y=0$; pentru $x=1$ avem un maxim $y=1$. **1436.** Pentru $x=\frac{3}{4}$ avem un minim $y=-\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}\approx -0{,}46$; pentru $x=1$ nu există extremum. **1437.** Pentru $x=1$ funcţia are un maxim $y=e^{-1}\approx 0{,}368$. **1438.** Pentru $x=+0$ avem un maxim marginal $y=0$; pentru $x=e^{-2}\approx 0{,}135$ avem un minim

$y=-\frac{2}{e}\approx -0{,}736$. **1439.** Pentru $x=1$ funcţia are un minim $y=0$; pentru $x=e^2\approx 7{,}389$ avem un maxim $y=\frac{4}{e^2}\approx 0{,}541$. **1440.** Pentru $x=k\pi\ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ avem un maxim $y=(-1)^k+\frac{1}{2}$; pentru $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ avem un minim $y=-\frac{3}{4}$. **1441.** Pentru $x=k\pi\ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ avem un maxim $y=10$; pentru $x=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)\ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ funcţia are un minim $y=5$. **1442.** Pentru $x=1$ avem un maxim $y=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\ln 2\approx 0{,}439$. **1443.** Pentru $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k\ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ funcţia are un minim $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}$; pentru $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k\ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ avem un maxim $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$. **1444.** Pentru $x=-1$ avem un maxim $y=e^{-2}\approx 0{,}135$; pentru $x=0$ avem un minim $y=0$ (punct unghiular); pentru $x=1$ avem un maxim $y=1$. **1445.** $\frac{1}{2}$; 32. **1446.** 2; 66. **1447.** 0; 132. **1448.** 2; 100,01. **1449.** 1; 3. **1450.** 0; $\frac{100}{e}\approx 36{,}8$. **1451.** 0; 1. **1452.** 0; $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx 1{,}2$. **1453.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\approx -0{,}067$; 1. **1454.** $m(x)=-\frac{1}{6}$, dacă $-\infty<x\leq -3$; $m(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$, dacă $-3<x\leq -1$; $m(x)=0$, dacă $-1<x<+\infty$; $M(x)=\frac{1}{2}$, dacă $-\infty<x\leq 1$; $M(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$, dacă $1<x<+\infty$. **1455.** a) $\frac{14^{10}}{2^{14}}\approx 1{,}77\cdot 10^7$; b) $\frac{1}{200}$; c) $\sqrt[3]{3}\approx 1{,}44$. **1457.** $\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4{,}85$. **1458.** $q=-\frac{1}{2}$. **1459.** $\frac{4}{27}$. **1460.** $g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2)$; $\Delta=\frac{1}{8}(x_1-x_2)^2$. **1461.** $\frac{2}{3}$. **1462.** O singură rădăcină: $(3, +\infty)$. **1463.** O rădăcină: $-\infty<x_1<-1$, dacă $h>27$; trei rădăcini: $-\infty<x_1<-1$, $-1<x_2<3$ şi $3<x_3<+\infty$, dacă $-5<h<27$; o rădăcină:

$3<x_3<+\infty$, dacă $h<-5$. **1464.** Două rădăcini: $-\infty<x_1<-1$ şi $1<x_2<+\infty$. **1465.** O rădăcină: $-\infty<x_1<-1$, dacă $-\infty<a<-4$; trei rădăcini: $-\infty<x_1<-1$, $-1<x_2<1$, $1<x_3<+\infty$, dacă $-4<a<4$; o rădăcină $1<x_1<+\infty$, dacă $4<a<+\infty$. **1466.** O rădăcină: $0<x_1<1$, dacă $-\infty<k<0$; două rădăcini: $0<x_1<\frac{1}{k}$ şi $\frac{1}{k}<x_2<+\infty$, dacă $0<k<\frac{1}{e}$; nu sînt rădăcini, dacă $k>\frac{1}{e}$. **1467.** Nu avem rădăcini, dacă $a<0$; o rădăcină: $-\infty<x_1<2$, dacă $0<a<\frac{e^2}{4}$; trei rădăcini: $-\infty<x_1<0$, $0<x_2<2$ şi $2<x_3<+\infty$, dacă $\frac{e^2}{4}<a<+\infty$. **1468.** Două rădăcini pentru $|a|<\frac{3\sqrt{3}}{16}$; nu avem rădăcini pentru $|a|>\frac{3\sqrt{3}}{16}$. **1469.** Două rădăcini: $0<|x_1|<\xi$ şi $\xi<|x_2|<+\infty$, unde $\xi\approx 1{,}2$ este rădăcina pozitivă a ecuaţiei: $\operatorname{cth} x=x$, dacă $|k|>\operatorname{sh}\xi\approx 1{,}50$; nu avem rădăcini dacă $|k|<\operatorname{sh}\xi$. **1470.** a) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}>0$; b) $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}<0$. **1471.** Funcţia este simetrică în raport cu originea. Zerourile funcţiei sînt: $x=0$ şi $x=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1{,}73$. Avem un minim $y=-2$ pentru $x=-1$; un maxim $y=2$ pentru $x=1$; $x=0$, $y=0$ este un punct de inflexiune. **1472.** Funcţia este simetrică în raport cu axa Oy. Zerourile sînt $x=\pm\sqrt{1+\sqrt{3}}\approx\pm 1{,}65$. Funcţia are un minim $y=1$ pentru $x=0$; un maxim $y=1\frac{1}{2}$ pentru $x=\pm 1$. Punctele de inflexiune sînt: $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58$; $y=1\frac{5}{18}$. **1473.** Simetrie în raport cu punctul $A(1,\ 2)$. Zerourile sînt $x=-1$ şi $x=2$. Funcţia are un minim $y=0$ pentru $x=2$; un maxim $y=4$ pentru $x=0$; $x=1$, $y=2$ este un punct de inflexiune. **1474.** Funcţia este simetrică în raport cu axa Oy. Zerourile funcţiei sînt $x=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1{,}41$. Un maxim $y=1$ pentru $x=0$; un minim $y=1-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx -0{,}12$ pentru $x=\pm\sqrt{2+\sqrt{5}}\approx\pm 2{,}06$. Punctele de inflexiune sînt $x_{1,2}=\pm 1$, $y_{1,2}=\frac{1}{2}$; $x_{3,4}\approx\pm 1{,}51$, $y_{3,4}\approx -0{,}046$. Asimptota este $y=0$. **1475.** Zerourile sînt $x=\pm 1$. Puncte de discontinuitate sînt: $x=2$ şi $x=3$. Funcţia are un minim $y=-\frac{241-30\sqrt{24}}{25}\approx -3{,}76$ pentru $x=\frac{7-\sqrt{24}}{5}\approx 0{,}42$; un maxim

$y=-\frac{241+30\sqrt{24}}{25}\approx -15{,}52$ pentru $x=\frac{7+\sqrt{24}}{5}\approx 2{,}38$; $x\approx -0{,}586$, $y\approx -0{,}0708$ sînt puncte de inflexiune. Asimptotele: $x=2$, $x=3$ şi $y=1$. **1476.** $x=0$ este un zero al funcţiei. Puncte de discontinuitate: $x_1=-1$ şi $x_2=1$. Nu există extremum; $x\approx -0{,}22$, $y\approx -0{,}20$ este un punct de inflexiune. Asimptotele: $x=-1$, $x=1$ şi $y=0$. **1477.** $x=0$ este un zero al funcţiei. Funcţia este discontinuă pentru $x=-1$. Funcţia are un minim $y=0$ pentru $x=0$; un maxim $y=-9\frac{13}{27}$ pentru $x=-4$. N-are puncte de inflexiune. Asimptotele $x=-1$ şi $y=x-3$. **1478.** Funcţia are un minim $y=0$ pentru $x=-1$; un punct de inflexiune $x=-4$, $y=\frac{81}{625}$. Asimptotele: $x=1$ şi $y=1$. **1479.** Valorile maxime sînt: $y=-\frac{34\sqrt{17}+142}{32}\approx -8{,}82$ pentru $x=-\frac{3+\sqrt{17}}{2}\approx -3{,}56$ şi $y=0$ pentru $x=0$; funcţia are un minim $y=\frac{34\sqrt{17}-142}{32}\approx -0{,}06$ pentru $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}\approx 0{,}56$. Punct de inflexiune $x=\frac{1}{5}$, $y=-\frac{1}{45}$. Asimptotele: $x=-1$ şi $y=x-3$. **1480.** Funcţia este simetrică în raport cu originea. N-are extremum; $x=0$, $y=0$ este un punct de inflexiune. Asimptotele sînt: $x=-1$, $x=1$ şi $y=0$. **1481.** Are un minim $y=13\frac{1}{2}$ pentru $x=5$; un punct de inflexiune pentru $x=-1$, $y=0$. Asimptotele sînt: $x=1$ şi $y=x+5$. **1482.** Avem minim $y=2\frac{2}{3}$ pentru $x=2$; maxim $y\approx -3{,}2$ pentru $x\approx -2{,}4$; un punct de inflexiune pentru $x=0$, $y=8$. Asimptotele sînt: $x=-1$ şi $y=x$. **1483.** Simetrie în raport cu axa Oy. Zerourile funcţiei sînt: $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{4}\approx\pm 0{,}79$. Nu există extremumuri. Punctele de inflexiune: $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx\pm 0{,}71$, $y=-2\frac{2}{3}$. Asimptotele sînt: $x=-1$, $x=0$, $x=1$ şi $y=0$. **1484.** Domeniul de existenţă: $0\leq x<+\infty$. Zerourile sînt: $x=0$ şi $x=3$. Avem un minim $y=-2$ pentru $x=1$; un maxim marginal $y=0$ pentru $x=0$. Concavitatea este în sus. **1485.** Domeniul de existenţă este: $|x|\leq 2\sqrt{2}\approx 2.83$. Simetrie în raport cu originea şi cu axele de coordonate. Zerourile sînt: $x=0$ şi $x=\pm 2\sqrt{2}$. Avem maxim $|y|=4$ pentru $x=\pm 2$; minim $|y|=0$ pentru $x=0$; un minim marginal $|y|=0$ pentru $x=\pm 2\sqrt{2}$. Nu avem puncte de inflexiune. **1486.** Domeniul de

existenţă este: $1 \leq x \leq 2$ şi $3 \leq x < +\infty$. Zerourile sînt: $x=1$, $x=2$ şi $x=3$. Avem maxim $|y| = \frac{1}{3}\sqrt[4]{12} \approx 0{,}62$ pentru $x = \frac{6-\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}42$; minime marginale $|y|=0$ pentru $x=1$, 2 şi 3. Nu avem puncte de inflexiune. **1487.** Avem minim $y=0$ pentru $x=1$; maxim $y=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4} \approx 1{,}06$ pentru $x=-\frac{1}{3}$; punct de inflexiune pentru $x=-1$, $y=0$. Asimptota: $y=x-\frac{1}{3}$. **1488.** Funcţia este simetrică în raport cu axa Oy. Minim $y=-1$ pentru $x=0$. Concavitatea în jos. Asimptota $y=0$. **1489.** Funcţia este simetrică în raport cu originea. Zerourile funcţiei sînt: $x=0$. Avem un minim $y=-\sqrt[3]{16} \approx -2{,}52$ pentru $x=-2$; un maxim $y=\sqrt[3]{16}$ pentru $x=2$. Punct de inflexiune: $x=0$, $y=0$. Asimptota: $y=0$. **1490.** Funcţia este simetrică în raport cu axa Oy. Avem minim $y=\sqrt[3]{4} \approx 1{,}59$ pentru $x=\pm 1$; un maxim $y=2$ pentru $x=0$. Concavitatea în jos. **1491.** Funcţia este simetrică în raport cu originea coordonatelor. Punctele de discontinuitate sînt: $x=\pm 1$. Funcţia are un zero pentru $x=0$. Avem minim $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}38$ pentru $x=\sqrt{3}$; maxim $y=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ pentru $x=-\sqrt{3}$. Punctele de inflexiune sînt: $x_1=0$, $y_1=0$ şi $x_{2,3}=\pm 3$, $y_{2,3}=\pm 1\frac{1}{2}$. **1492.** Domeniul de existenţă al funcţiei este: $x=0$ (punct izolat) şi $|x| \geq 1$. Funcţia este simetrică în raport cu axa Oy. Avem minim marginal $y=0$ pentru $x=\pm 1$. Concavitatea în jos. Asimptotele sînt: $y=\frac{x}{2}$ pentru $x \to +\infty$ şi $y=-\frac{x}{2}$ pentru $x \to -\infty$. **1493.** Domeniul de existenţă al funcţiei este: $x>0$. Minim $y=\frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1{,}30$ pentru $x=\frac{1}{2}$. Concavitatea este în sus. Asimptota este $y=x+\frac{3}{2}$. **1494.** Domeniul de existenţă este: $x \geq 0$ şi $x<-3$. Funcţia are un zero pentru $x=\frac{5+\sqrt{13}}{2} \approx 4{,}30$. Funcţia are un minim $y=13$ pentru $x=-4$; un maxim marginal $y=1$ pentru $x=0$. Concavitatea în sus. Asimptotele sînt: $y=\frac{5}{2}-2x$ pentru $x \to -\infty$; $y=-\frac{1}{2}$ pentru $x \to +\infty$ şi $y=-3$ pentru $x \to -3-0$. **1495.** Minim $y=0$ pentru $x=0$. Punctele de inflexiune sînt: $x_1=-(2-\sqrt{3}) \approx -0{,}27$, $y_1=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}-5}{2}} \approx 0{,}46$; $x_2=$

$=-(2+\sqrt{3}) \approx -3{,}73$, $y_2=-\sqrt[3]{\frac{5+\sqrt{27}}{2}} \approx -1{,}72$. Asimptota este $x=-1$. **1496.** Funcţia este simetrică în raport cu axa Oy. Funcţia este pozitivă. Avem un maxim $y=\sqrt{3} \approx 1{,}73$ pentru $x=0$; minim $y=\sqrt{2} \approx 1{,}41$ pentru $x=\pm 1$. Asimptotele sînt: $y=\pm x$. **1497.** Perioada funcţiei este: $T=2\pi$; domeniul fundamental este $0 \leq x \leq 2\pi$. Zerourile funcţiei sînt: $x_1=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1{,}21\pi$ şi $x_2=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1{,}79\pi$. Funcţia are un minim $y=1$ pentru $x=\frac{\pi}{2}$ şi $y=-1$ pentru $x=\frac{3\pi}{2}$; un maxim $y=1\frac{1}{4}$ pentru $x=\frac{\pi}{6}$ şi $x=\frac{5\pi}{6}$. Punctele de inflexiune sînt: $x_1=\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0{,}32\pi$, $y_1=\frac{19+3\sqrt{33}}{32} \approx 1{,}13$; $x_2=\pi-\arcsin\frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0{,}68\pi$, $y_2=\frac{19+3\sqrt{33}}{32}$; $x_3=\pi+\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1{,}20\pi$, $y_3=\frac{19-3\sqrt{33}}{32} \approx 0{,}055$; $x_4=2\pi-\arcsin\frac{\sqrt{33}-1}{8} \approx 1{,}80\pi$, $y_4=\frac{19-3\sqrt{33}}{32}$. **1498.** Perioada funcţiei este 2π; domeniul fundamental este $-\pi \leq x \leq \pi$. Funcţia este simetrică în raport cu originea. Zerourile sînt: $x=0$ şi $x=\pm\pi$. Funcţia are un minim $y=-\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx -7{,}3$ pentru $x=-\arccos\frac{1}{4} \approx -0{,}42\pi$; funcţia are un maxim $y=\frac{15}{8}\sqrt{15} \approx 7{,}3$ pentru $x=\arccos\frac{1}{4} \approx 0{,}42\pi$. Punctele de inflexiune sînt: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_{2,3}=\pm\arccos\left(-\frac{7}{8}\right) \approx \pm 0{,}84\pi$; $y_{2,3}=\pm\frac{21}{32}\sqrt{15} \approx \pm 2{,}54$; $x_{4,5}=\pm\pi$, $y_{4,5}=0$. **1499.** Perioada funcţiei este $T=2\pi$; domeniul fundamental: $-\pi \leq x \leq \pi$. Funcţia este simetrică în raport cu originea. Zerourile sînt: $x_1=0$ şi $x_{2,3}=\pm\pi$. Valorile minime sînt: $y=-\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx -0{,}94$ pentru $x=-\frac{3\pi}{4}$ şi $x=-\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{2}{3}$ pentru $x=\frac{\pi}{2}$; valorile maxime sînt: $y=-\frac{2}{3}$ pentru $x=-\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{2}{3}\sqrt{2}$ pentru $x=\frac{\pi}{4}$ şi $x=\frac{3\pi}{4}$. Punctele de inflexiune sînt: $x_1=0$, $y_1=0$; $x_{2,3}=\pm\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0{,}37\pi$, $y_{2,3}=\frac{4}{27}\sqrt{30} \approx 0{,}81$; $x_{4,5}=\pm\left(\pi-\arcsin\sqrt{\frac{5}{6}}\right) \approx \pm 0{,}63\pi$, $y_{4,5}=\frac{4}{27}\sqrt{30}$; $x_{6,7}=\pm\pi$, $y_{6,7}=0$.

1500. Perioada funcţiei este: $T=2\pi$; domeniul fundamental este $[-\pi, \pi]$. Funcţia este simetrică în raport cu axa Oy. Zerourile funcţiei: $x=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{3}}{2}\approx\pm0{,}62\pi$. Valorile minime sînt: $y=\frac{1}{2}$ pentru $x=0$; $y=-1\frac{1}{2}$ pentru $x=\pm\pi$; valorile maxime sînt: $y=\frac{3}{4}$ pentru $x=\pm\frac{\pi}{3}$. Punctele de inflexiune sînt: $x_{1,2}=\pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8}\approx\pm0{,}18\pi$, $y_{1,2}\approx0{,}63$, $x_{3,4}=\pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8}\approx\pm0{,}70\pi$, $y_{3,4}\approx-0{,}44$. **1501.** Perioada funcţiei este: $T=\frac{\pi}{2}$; domeniul fundamental $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Funcţia este simetrică în raport cu axa Oy. Funcţia este pozitivă. Are un maxim $y=1$ pentru $x=0$; are un minim $y=\frac{1}{2}$ pentru $x=\pm\frac{\pi}{4}$. **1502.** Perioada funcţiei: $T=\pi$; domeniul fundamental este $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Avem simetrie în raport cu axa Oy. Zerourile funcţiei sînt: $x_1=0$ şi $x_{2,3}=\pm\frac{\pi}{3}$. Minimele sînt: $y=0$ pentru $x=0$ şi $y=-1$ pentru $x=\pm\frac{\pi}{2}$; funcţia are un maxim $y=\frac{1}{2}$ pentru $x=\pm\frac{\pi}{6}$. Punctele de inflexiune sînt: $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{129}}{16}\approx0{,}11\pi$, $y_{1,2}\approx0{,}29$; $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\times\arccos\frac{1-\sqrt{129}}{16}\approx0{,}36\pi$, $y_{3,4}\approx-0{,}24$. **1503.** Perioada funcţiei: $T=2\pi$; domeniul fundamental: $0\leq x\leq 2\pi$. Punctele de discontinuitate sînt: $x=\frac{3\pi}{4}$ şi $x=\frac{7\pi}{4}$. Zerourile sînt $x_1=0$, $x_2=\pi$, $x_3=2\pi$. Funcţia n-are valori extreme, ea este crescătoare. Punctele de inflexiune sînt: $x_1=\frac{\pi}{4}$, $y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2=\frac{5\pi}{4}$, $y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Asimptotele: $x=\frac{3\pi}{4}$ şi $x=\frac{7\pi}{4}$. **1504.** Perioada funcţiei: $T=2\pi$; domeniul fundamental este $[-\pi, \pi]$. Avem simetrie în raport cu axa Oy. Zerourile funcţiei sînt: $x=\pm\frac{\pi}{2}$. Funcţia are un minim $y=1$ pentru $x=0$; un maxim $y=-1$ pentru $x=\pm\pi$. Asimptotele sînt: $x=\pm\frac{\pi}{4}$ şi $x=\pm\frac{3\pi}{4}$. **1505.** Avem simetrie în raport cu punctul $O(0, 0)$. Zerourile funcţiei sînt: $x_1=0$, $x_{2,3}\approx\pm0{,}37\pi$. Funcţia are valorile maxime

$y=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$ pentru $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ şi $y=-\left(\frac{3\pi}{2}+1+2k\pi\right)$ pentru $x=-\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$; funcţia are valorile minime $y=\frac{3\pi}{2}+1+2k\pi$ pentru $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$ şi $y=-\left(\frac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)$ pentru $x=-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. Punctele de inflexiune sînt: $x=k\pi$, k număr întreg. Asimptotele sînt: $x=\frac{2k+1}{2}\pi$, k număr întreg. **1506.** Avem simetrie în raport cu dreapta $x=1$. Funcţia este pozitivă. Ea are un maxim $y=e$ pentru $x=1$. Punctele de inflexiune sînt: $x_{1,2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{1,2}=\sqrt{e}\approx1{,}65$. Asimptota este $y=0$. **1507.** Avem simetrie în raport cu axa Oy. Funcţia este pozitivă. Ea are un maxim $y=1$ pentru $x=0$. Punctele de inflexiune sînt $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm1{,}22$, $y_{1,2}=\frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}}\approx0{,}56$. Asimptota este $y=0$. **1508.** Funcţia este pozitivă; ea are un minim $y=1$ pentru $x=0$. Concavitatea în sus. Asimptota este $y=x$ pentru $x\to+\infty$. **1509.** Funcţia este nenegativă; $x=0$ este zeroul acestei funcţii. Are un minim $y=0$ pentru $x=0$; un maxim $y=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}}\approx0{,}39$ pentru $x=\frac{2}{3}$. Punctele de inflexiune sînt: $x_1=\frac{2-\sqrt{6}}{3}\approx-0{,}15$, $y_1\approx0{,}34$ şi $x_2=\frac{2+\sqrt{6}}{3}\approx1{,}48$, $y_2\approx0{,}30$. $y=0$ este asimptota pentru $x\to+\infty$. **1510.** Funcţia este pozitivă pentru $x>-1$ şi este negativă pentru $x<-1$. Ea are un minim $y=1$ pentru $x=0$. Concavitatea în sus pentru $x>-1$ şi în jos pentru $x<-1$; $x=-1$ este asimptota. **1511.** Avem simetrie în raport cu axa Oy. Funcţia este nenegativă; ea are un zero pentru $x=0$ şi minimul $y=0$ (punct unghiular) pentru $x=0$. Concavitatea este în jos. **1512.** Domeniul de existenţă al funcţiei este: $x>0$. $x=1$ este un zero al funcţiei. Ea are un maxim $y=\frac{2}{e}\approx0{,}74$ pentru $x=e^2\approx7{,}39$, un punct de inflexiune pentru $x=e^{\frac{8}{3}}\approx14{,}33$, $y=\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\approx0{,}70$. Asimptotele sînt: $y=0$ pentru $x\to+0$ şi $y=0$ pentru $x\to+\infty$. **1513.** Avem simetrie în raport cu originea coordonatelor. Funcţia are un zero pentru $x=0$. Extremumuri nu există;

funcţia este crescătoare; $x=0$, $y=0$ este un punct de inflexiune. **1514.** Avem simetrie în raport cu originea coordonatelor. Funcţia are un zero pentru $x=0$. Funcţia este crescătoare. Concavitatea în sus pentru $x>0$ şi în jos pentru $x<0$; $O(0, 0)$ este un punct de inflexiune. **1515.** Domeniul de existenţă al funcţiei este: $|x|<1$. Ea este simetrică în raport cu originea coordonatelor. Funcţia este monoton crescătoare. Concavitatea este în sus pentru $x>0$ şi în jos pentru $x<0$; are un punct de inflexiune pentru $x=0$, $y=0$. Asimptotele sînt: $x=\pm 1$. **1516.** Avem simetrie în raport cu originea coordonatelor. Funcţia are un zero pentru $x=0$. Nu are extremumuri, funcţia este crescătoare. Ea are un punct de inflexiune pentru $x=0$, $y=0$. Asimptotele sînt: $y=x-\frac{\pi}{2}$ pentru $x\to-\infty$ şi $y=x+\frac{\pi}{2}$ pentru $x\to+\infty$. **1517.** Funcţia are un zero pentru $x\approx-5{,}95$. Ea are un minim $y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\approx1{,}285$ pentru $x=1$; un maxim $y=-\frac{1}{2}+\frac{3\pi}{4}\approx1{,}856$ pentru $x=-1$. Concavitatea în sus pentru $x>0$ şi în jos pentru $x<0$; un punct de inflexiune pentru $x=0$, $y=0$. Asimptotele sînt: $y=\frac{x}{2}+\pi$ pentru $x\to-\infty$ şi $y=\frac{x}{2}$ pentru $x\to+\infty$. **1518.** Avem simetrie în raport cu axa Oy. Funcţia este nenegativă; ea are un zero pentru $x=0$. Funcţia are un minim $y=0$ pentru $x=0$. Concavitatea în sus. Asimptotele sînt: $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ pentru $x\to-\infty$ şi $y=\frac{\pi}{2}x-1$ pentru $x\to+\infty$ **1519.** Funcţia este simetrică în raport cu originea coordonatelor. Ea are un zero pentru $x=0$. Funcţia are un minim $y=-\frac{\pi}{2}$ (punct unghiular) pentru $x=1$; un maxim $y=\frac{\pi}{2}$ (punct unghiular) pentru $x=1$. Punctul de inflexiune este $x=0$, $y=0$. Asimptota este $y=0$. **1520.** Avem simetrie în raport cu axa Oy. Funcţia este nenegativă; ea are un zero pentru $x=0$, un minim $y=0$ pentru $x=0$ (punct unghiular). Concavitatea în jos. Asimptota este $y=\pi$. **1521.** $x=0$ este un punct de discontinuitate; $x=-2$ este un zero al funcţiei. Funcţia are un minim $y=4\sqrt{e}\approx6{,}05$ pentru $x=2$, un maxim $y=\frac{1}{e}\approx0{,}37$ pentru $x=-1$; $x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}\approx0{,}13$ este un punct de inflexiune; $y=x+3$ este asimptotă. **1522.** Domeniul de existenţă al funcţiei este $|x|\geq1$. Ea este simetrică în raport cu axa Oy; are un maxim marginal $y=2^{\sqrt{2}}\approx2{,}67$ pentru $x=\pm1$. Concavitatea în sus; $y=1$ este asimptota. **1523.** Domeniul de existenţă al funcţiei este: $x<1$ şi $x>2$. Punctele de intersecţie cu axele de coordonate sînt $(0, \ln 2)$ şi $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Maxim $y\approx1{,}12$ pentru $x=\frac{1-\sqrt{10}}{3}\approx-0{,}72$. Asimptota este $y=0$. **1524.** Domeniul de existenţă al funcţiei este $|x|\leq a$. Punctele de intersecţie cu axele de coordonate sînt: $(0, -a)$ şi $(0{,}67a, 0)$ (cu aproximaţie); funcţia este monoton crescătoare. Ea are un minim marginal $y=-\frac{\pi}{2}a$ pentru $x=-a$ şi un maxim marginal $y=\frac{\pi}{2}a$ pentru $x=a$. Concavitatea este orientată în sus. **1525.** Domeniul de existenţă al funcţiei: $x\leq0$ şi $x\geq\frac{2}{3}$. Ea are un minim marginal $y=0$ pentru $x=0$. Ea are un maxim marginal $y=\pi$ pentru $x=\frac{2}{3}$. Concavitatea în jos pentru $x\leq0$ şi în sus pentru $x\geq\frac{2}{3}$. Asimptota este $y=\frac{\pi}{3}$. **1526.** Domeniul de existenţă al funcţiei este: $x>0$. Funcţia este pozitivă. Ea are un minim $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{1/e}\approx0{,}692$ pentru $x=\frac{1}{e}\approx0{,}368$; ea are un maxim marginal $y=1$ pentru $x=+0$. Concavitatea în sus. **1527.** Domeniul de existenţă al funcţiei este $x>0$. Ea are un minim marginal $y=0$ pentru $x=+0$; un maxim $y=e^{1/e}\approx1{,}445$ pentru $x=e$. Asimptota este $y=1$. **1528.** Domeniul de existenţă este: $x>-1$, $x\neq0$. Funcţia este pozitivă. Ea are un punct de discontinuitate neesenţială pentru $x=0$. Nu are extremumuri; funcţia este descrescătoare. Concavitatea în sus. Asimptotele sînt: $x=-1$ şi $y=1$. **1529.** Funcţia este monotonă pentru $x>0$; ea are un minim marginal $y=0$ pentru $x=+0$. Asimptota este $y=e\left(x-\frac{1}{2}\right)$. **1530.** Funcţia este pozitivă. Ea este simetrică în raport cu axa Oy. Punctele de discontinuitate sînt: $x=\pm1$. Ea are un minim $y=e$ pentru $x=0$; un maxim $y=\frac{1}{4\sqrt{e}}\approx0{,}15$ pentru $x=\pm\sqrt{3}$. Funcţia are patru puncte de inflexiune. Asimptotele sînt: $y=-1$ pentru $x\to-1+0$; $y=1$ pentru $x\to1-0$ şi $y=0$ pentru $x\to\infty$. **1531.** Funcţiile x şi y sînt nenegative; $x_{min}=0$ pentru $t=-1$; $y_{min}=0$ pentru $t=1$. Concavitatea în sus pentru $t>-1$ şi în jos pentru $t<-1$. **1532.** Punctele de intersecţie cu axele de coordonate sînt: $(0, 0)$ pentru $t=0$; $(\pm2\sqrt{3}-3, 0)$ pentru $t=\pm\sqrt{3}$ şi $(0, -2)$

pentru $t=2$. $x_{max}=1$ şi $y_{max}=1$ pentru $t=1$ (punct de întoarcere); $y_{min}=-2$ pentru $t=-1$. Concavitatea în sus pentru $t<1$ şi în jos pentru $t>1$. **1533.** Punctele de intersecţie cu axele de coordonate sînt: (0, 0) pentru $t=0$; $x_{max}=0$ pentru $t=0$, $x_{min}=4$ pentru $t=2$; y este descrescătoare pentru t crescător. Punctul de inflexiune este $(-0{,}08; 0{,}3)$ pentru $t\approx-0{,}32$ (cu aproximaţie). Asimptotele sînt: $y=0$, $x=-\frac{1}{2}$ şi $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$. **1534.** Punctul de intersecţie cu axa Oy este: (0, 1) pentru $t=0$; punctul de intersecţie cu axa Ox este: $(-1, 0)$ pentru $t=\infty$. Extremumurile marginale sînt: $x_{min}=0$ şi $y_{max}=1$ pentru $t=0$; $x_{max}=-1$ şi $y_{min}=0$ pentru $t=\infty$. Nu avem puncte de inflexiune. Asimptota este $y=\frac{1}{2}$. Concavitatea în sus pentru $|t|>1$ şi în jos pentru $|t|<1$. **1535.** Funcţiile x şi y sînt pozitive; $x_{min}=1$ şi $y_{min}=1$ pentru $t=0$ (punct de întoarcere). Pentru $t<0$ concavitatea este în sus; pentru $t>0$, ea este în jos. Asimptota este $y=2x$ pentru $t\to+\infty$. **1536.** Domeniul fundamental este: $[0, \pi]$. Punctele de intersecţie cu axele de coordonate sînt: $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ pentru $t=\frac{\pi}{6}$; $\left(0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ pentru $t=\frac{\pi}{4}$; $(-a, 0)$ pentru $t=\frac{\pi}{2}$; $\left(0, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ pentru $t=\frac{3\pi}{4}$; $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ pentru $t=\frac{5\pi}{6}$. Valorile extreme sînt: $x_{max}=a$ şi $y_{max}=a$ pentru $t=0$; $y_{min}=-a$ pentru $t=\frac{\pi}{3}$; $x_{min}=-a$ pentru $t=\frac{\pi}{2}$; $y_{max}=a$ pentru $t=\frac{2\pi}{3}$; $x_{max}=a$ şi $y_{min}=-a$ pentru $t=\pi$. Concavitatea în sus pentru $0<t<\frac{\pi}{2}$; în jos pentru $\frac{\pi}{2}<t<\pi$. **1537.** Funcţiile x şi y sînt nenegative şi periodice; domeniul fundamental este $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$. Extremumurile sînt: $x_{min}=0$ şi $y_{max}=1$ pentru $t=\frac{\pi}{2}$ şi $x_{max}=1$ şi $y_{min}=0$ pentru $t=0$. Concavitatea în sus. **1538.** Domeniul de existenţă este: $t>0$. Avem simetrie în raport cu dreapta $x+y=0$. Extremumurile sînt: $x_{min}=-\frac{1}{e}\approx-0{,}37$, $y=-e\approx-2{,}72$ pentru $t=\frac{1}{e}$; $y_{max}=-\frac{1}{e}$, $x=e$ pentru $t=e$. Punctele de inflexiune sînt: $x_1=-\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}\approx-0{,}34$, $y_1=-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\approx-5{,}82$ pentru $t=e^{-\sqrt{2}}\approx0{,}24$ şi $x_2=\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$; $y_2=\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$ pentru $t=e^{\sqrt{2}}\approx4{,}10$.

Pentru $t=\frac{1}{e}$ orientarea concavităţii se schimbă. Asimptotele sînt $x=0$ şi $y=0$. **1539.** Funcţiile x şi y sînt periodice de perioadă $T=2\pi$; domeniul fundamental este $-\pi\leq t\leq\pi$. Curba este simetrică în raport cu axele de coordonate. Ea are două ramuri. Extremumurile sînt: $x_{min}=a$, $y=0$ pentru $t=0$; $x_{max}=-a$, $y=0$ pentru $t=\pm\pi$. Concavitatea în sus pentru $-\pi<t<-\frac{\pi}{2}$ şi $0<t<\frac{\pi}{2}$; concavitatea în jos pentru $-\frac{\pi}{2}<t<0$ şi $\frac{\pi}{2}<t<\pi$. **1540.** Curba este simetrică în raport cu axa Oy; $y_{min}=0$, $x=0$ pentru $t=0$. Concavitatea în jos. **1541.** Ecuaţiile parametrice sînt: $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ $(-\infty<t<+\infty)$. Curba este simetrică în raport cu dreapta $y=x$. Punctul de intersecţie cu axele de coordonate este $O(0, 0)$ (punct dublu); $x_{max}=a\sqrt[3]{4}\approx1{,}59a$ pentru $y=a\sqrt[3]{2}\approx1{,}2a$; $y_{max}=a\sqrt[3]{4}$ pentru $x=a\sqrt[3]{2}$. Asimptota este $x+y+a=0$. **1542.** Curba este simetrică în raport cu originea coordonatelor, în raport cu axele de coordonate şi cu bisectoarele unghiurilor formate de axele de coordonate. $O(0, 0)$ este un punct izolat. Punctele de intersecţie cu axele de coordonate sînt: $(\pm1, 0)$ şi $(0, \pm1)$. $|x|_{min}=1$ pentru $y=0$; $|x|_{max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\approx1{,}10$ pentru $|y|=\sqrt{\frac{1}{2}}\approx0{,}71$; $|y|_{min}=1$ pentru $x=0$, $|y|_{max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ pentru $|x|=\sqrt{\frac{1}{2}}$. **1543.** Ecuaţiile parametrice sînt: $x=\frac{1-t^3}{t^2}$, $y=\frac{1-t^3}{t}$, unde $t=\frac{y}{x}$ $(-\infty<t<+\infty)$. Curba are două ramuri. Ea este simetrică în raport cu dreapta $x+y=0$. Extremumurile sînt: $x_{min}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\approx1{,}89$, $y=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\approx-2{,}38$ pentru $t=-\sqrt[3]{2}\approx-1{,}26$; $y_{max}=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$, $x=\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$ pentru $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\approx-0{,}80$. Punctele de inflexiune sînt: $x_1\approx2{,}18$, $y_1\approx-4{,}17$ pentru $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})}\approx-1{,}91$; $x_2\approx4{,}17$; $y_2\approx-2{,}18$ pentru $t=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})}\approx-0{,}523$; pentru $t=-\sqrt[3]{2}$ se schimbă semnul concavităţii. **1544.** Curba este formată din dreapta $y=x$ şi din ramura hiperbolică

$x=(1+t)^{1/t}$, $y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}$ $(-1<t<+\infty)$; (e, e) este un punct dublu. Concavitatea în sus pentru $x\neq y$. Asimptotele sînt: $x=I$ şi $y=I$. **1545**. Domeniul de existenţă este: $|x|\geqq \ln(1+\sqrt{2})\approx 0{,}88$. Curba este simetrică în raport cu axele de coordonate. Ea are un minim marginal $|y|=0$ pentru $x=\pm\ln(1+\sqrt{2})$. Concavitatea în jos pentru $y>0$ şi în sus pentru $y<0$. Asimptotele sînt: $y=x$ şi $y=-x$. **1546**. Domeniul de existenţă al funcţiei este: $r\geqq 0$, $|\varphi|\leqq\alpha$, unde $\alpha=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$. Curba este închisă. Este simetrică în raport cu axa polară. Are un maxim $r=a+b$ pentru $\varphi=0$ şi un minim marginal $r=0$ pentru $\varphi=\pm\alpha$. **1547**. Domeniul de existenţă este: $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}\leqq\varphi\leqq\pi$; $\frac{4\pi}{3}\leqq\varphi\leqq\frac{5\pi}{3}$. Funcţia r este periodică de perioadă $\frac{2\pi}{3}$. Curba este închisă şi are trei bucle identice. Axele de simetrie sînt: $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\frac{5\pi}{6}$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$. Originea ordonatelor $O(0, 0)$ este un punct triplu. In intervalul $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{3}$ avem: un maxim $r=a$ pentru $\varphi=\frac{\pi}{6}$ şi un minim $r=0$ pentru $\varphi=0$ şi $\varphi=\frac{\pi}{3}$. **1548**. Domeniul de existenţă a funcţiei este: $|\varphi|<\frac{\pi}{6}$ şi $\frac{\pi}{2}<|\varphi|<\frac{5}{6}\pi$; perioada este $\frac{2\pi}{3}$. Funcţia are un minim $r=a$ pentru $\varphi=0$ şi $\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}$. Asimptotele sînt: $\varphi=\pm\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$ şi $\varphi=\pm\frac{5\pi}{6}$. **1549**. Spirală care admite originea coordonatelor drept punct asimptotic; r este monoton descrescătoare pentru φ crescător. Asimptota este $\varphi=1$. **1550**. Domeniul de existenţă este $r\geqq\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}62$. Funcţia are un maxim marginal $\varphi=\pi$ pentru $r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ şi un minim $\varphi=\arccos\frac{1}{4}\approx$ arc $75°30'$ pentru $r=2$. Asimptota este $\varphi=\frac{\pi}{2}$ pentru $r\to+\infty$. **1551**. Familia de parabole cu vîrfurile în $(1, a-1)$ (minime). Punctele de intersecţie cu axele de coordonate sînt $(0, a)$ şi $(1\mp\sqrt{1-a}, 0)$ (pentru $a\leqq 1$). Concavitatea în sus. **1552**. Familie de hiperbole pentru $a\neq 0$ şi dreapta $y=x$ pentru $a=0$. Minime $y=2|a|$ pentru $x=|a|$ şi maxime $y=-2|a|$ pentru $x=-|a|$ $(a\neq 0)$. Asimptotele sînt $y=x$ şi $y=0$. **1553**. Familie de elipse pentru $0<a<+\infty$; familie de hiperbole pentru $-\infty<a<0$; dreapta $y=x$ pentru $a=0$. Toate curbele familiei trec prin punctul $(-1, -1)$ şi $(1, 1)$. Pentru $y\geqq x$

avem: 1) maxim $y=\sqrt{1+a}$ pentru $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ dacă $a>0$; maxim $y=-\sqrt{1+a}$ pentru $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ dacă $-1<a<0$; minimele marginale sînt $y=\mp 1$ pentru $x=\mp 1$ $(a\neq 0)$; 2) concavitatea în jos. Pentru $y\leqq x$ avem: 1) un minim $y=-\sqrt{1+a}$ pentru $x=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ dacă $a>0$; un minim $y=\sqrt{1+a}$ pentru $x=\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ dacă $-1<a<0$; maximele marginale sînt: $y=\mp 1$ pentru $x=\mp 1$; 2) concavitatea în sus. Asimptotele sînt: $y=(1+\sqrt{-a})\,x$ şi $y=(1-\sqrt{-a})\,x$ pentru $a<0$. **1554**. Familie de curbe exponenţiale dacă $a\neq 0$; dreapta $y=1+\frac{x}{2}$ dacă $a=0$. Punctul comun al familiei este $(0, 1)$. Minimele sînt: $y=\frac{1}{2a}(1+\ln 2a)$ pentru $x=\frac{1}{a}\ln 2a$, dacă $a>0$; y este monoton crescătoare dacă $a\leqq 0$. Asimptota este $y=\frac{x}{2}$. **1555**. O familie de curbe care trec prin punctul $(0, 0)$, avînd în acest punct un contact comun de ordinul întîi cu dreapta $y=x$. Maximele sînt $y=ae^{-1}\approx 0{,}37\,a$ pentru $x=a$, dacă $a>0$. Minimele sînt: $y=ae^{-1}$ pentru $x=a$, dacă $a<0$. Punctele de inflexiune sînt $x=2a$, $y=2ae^{-2}\approx 0{,}27a$. Asimptota este $y=0$. **1558**. $\frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$. **1559**. $(m+n)\left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$. **1560**. Baza sistemului de logaritmi nu trebuie să depăşească numărul $e^{\frac{1}{e}}\approx 1{,}445$. **1561**. Pătratul cu latura $\sqrt{S}$. **1562**. Unghiurile ascuţite ale triunghiului sînt $30°$ şi $60°$. **1563**. Inălţimea vasului $H=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ este egală cu diametrul bazei sale; suprafaţa totală $P=\sqrt[3]{54\pi V^2}$. **1564**. $\cos\varphi=\frac{\cos\alpha+\sqrt{\cos^2\alpha+8}}{4}$, unde 2α este arcul segmentului şi 2φ este arcul subîntins de o latură a dreptunghiului. **15 5**. Laturile dreptunghiului sînt $a\sqrt{2}$ şi $b\sqrt{2}$. **1566**. Dacă $h>b$, perimetrul P al dreptunghiului înscris cu baza x şi înălţimea y are un maxim marginal pentru $y=h$; dacă $h<b$, P are un minim marginal pentru $y=0$; dacă $h=b$, perimetrul P este constant. **1567**. $b=\frac{d}{\sqrt{3}}$, $h=d\sqrt{\frac{2}{3}}$. **1568**. Dimensiunile paralelipipedului $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ şi $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **1569**. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$. **1570**. $\pi R^2\left(1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\approx 78\,\%$ din suprafaţa sferei.

1571. Volumul conului este egal cu dublul volumului sferei. 1572. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} l^3$. 1573. Dacă $\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{2}$, maximul suprafeței totale a cilindrului este atins pentru $r=\frac{R}{2(1-\operatorname{tg}\alpha)}$, r fiind raza bazei cilindrului. Dacă $\operatorname{tg}\alpha \geq \frac{1}{2}$, avem pentru $r=R$ un maxim marginal. 1574. $p(\sqrt[3]{2}-1)\sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{2}}{2}}$. 1575. 1; 3. 1576. Dacă $b\leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ maximul lungimii coardei este $\overline{MB}=\frac{a^2}{c}$, unde $c=\sqrt{a^2-b^2}$, iar punctul M are coordonatele $x=\pm\frac{a^2}{c^2}\sqrt{a^2-2b^2}$, $y=\frac{b^3}{c^2}$; dacă $b>\frac{a}{\sqrt{2}}$ maximul marginal al lungimii coardei $\overline{MB}=2b$ este atins pentru $x=0$, $y=b$. 1577. $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{2}}$; ab. 1578. Minimul suprafeței este atins pentru $r=h=\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$, unde r este raza bazei cilindrului și h este înălțimea lui. 1579. $\varphi=60°$. 1530. Trapezul circumscris cercului. Laturile neparalele $\overline{AB}=\overline{CD}=a\sec^2\frac{\alpha}{2}$. 1581. $\alpha=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\approx$ $\approx$ arc 288°, unde α este unghiul la centru al sectorului. 1582. $\varphi=\arccos\frac{q}{p}$, dacă $\arccos\frac{q}{p} \geq \operatorname{arctg}\frac{a}{b}$; $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$, dacă $\arccos\frac{q}{p}<\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$. 1583. $\frac{|av-bu|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$. 1584. $\overline{AM}=a\left(1+\sqrt[3]{\frac{S_2}{S_1}}\right)^{-1}$. 1585. Distanța punctului luminos la centrul sferei mai mari este egală cu $x=\frac{a}{1+\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}}$, dacă $a\geq r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$ și $x=a-r$, dacă $r+R<a<r+R\sqrt{\frac{R}{r}}$, a fiind distanța dintre centrele sferelor. 1586. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 1587. $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$. 1588. $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$ unde k este un coeficient de proporționalitate. 1589. arctg k. 1590. Pentru $l\leq 4a$ unghiul de înclinare al barei se determină din formula $\cos\alpha=\frac{\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$; pentru $l>4a$ n-avem echilibru. 1591. $k=-3$,

$b=3$; $y=3(1-x)$. 1592. $a=\frac{1}{2}e^{x_0}$; $b=e^{x_0}(1-x_0)$; $c=e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right)$. 1593. a) Ordinul întîi; b) ordinul al doilea; c) ordinul al doilea. 1595. a) $\sqrt{2}$, (2, 2); b) 500 000, (150, 500 000) (aproximativ). 1596. $p\left(1+\frac{2x}{p}\right)^{\frac{3}{2}}$. 1597. $\frac{(a^2-\varepsilon^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, unde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ este excentricitatea elipsei. 1598. $\frac{(\varepsilon^2x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}$, unde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ este excentricitatea hiperbolei. 1599. $3|axy|^{\frac{1}{3}}$. 1600. $\frac{a^2}{b}(1-\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}$, unde ε este excentricitatea elipsei. 1601. $2\sqrt{2ay}$. 1602. at. 1604. $\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}$. 1605 $\frac{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2+r^2}$. 1606. $r\sqrt{1+m^2}$. 1607. $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$. 1608. $\frac{a^2}{3r}$. 1609. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$. 1610. $x_0\approx 680$ m. 1611. Parabola semicubică $27p\eta^2=8(\xi-p)^3$. 1612. Astroida $(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$, unde $c^2=a^2-b^2$. 1613. Astroida $(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}$. 1614. Lănțișorul $\eta=a\,\mathrm{ch}\frac{\xi}{a}$. 1615. Spirala logaritmică $\rho=mae^{m\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)}$. 1616. $\xi=\pi a+a(\tau-\sin\tau)$; $\eta=-2a+a(1-\cos\tau)$, unde $\tau=t-\pi$. 1617. $x_1=-2{,}602$; $x_2=0{,}340$; $x_3=2{,}262$. 1618. $x_1=-0{,}724$; $x_2=1{,}221$. 1619. $x=2{,}087=$ $=$arc 119°35′. 1620. $\pm 0{,}824$. 1621. $x_1=0{,}472$; $x_2=9{,}999$. 1622. $x_1=2{,}5062$. 1623. $x_1=4{,}730$; $x_2=10{,}996$. 1624. $x=-0{,}56715$. 1625. $x=\pm 1{,}199678$. 1626. $x_1=4{,}493$; $x_2=7{,}725$; $x_3=10{,}904$. 1627. $x_1=2{,}081$; $x_2=5{,}940$.

CAPITOLUL III

In răspunsurile acestui capitol a fost omisă pentru prescurtare constanta aditivă arbitrară C. **1628.** $27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$. **1629.** $\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7$. **1630.** $x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4$. **1631** $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|$. **1632.** $a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}$. **1633.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}$. **1634.** $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}$. **1635.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{5}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)$. **1636.** $\frac{4(x^2+7)}{3\sqrt[4]{x}}$. **1637.** $2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}$. **1638.** $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}$. **1639.** $x-\operatorname{arctg}x$. **1640.** $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **1641.** $x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **1642.** $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **1643.** $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|$.

1644. $\frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}$. **1645.** $-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$. **1646.** $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x$. **1647.** $x-\cos x+\sin x$. **1648.** $(\cos x+\sin x)\cdot\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)$. **1649.** $-x-\operatorname{ctg}x$. **1650.** $-x+\operatorname{tg}x$. **1651.** $a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x$. **1652.** $x-\operatorname{th}x$. **1653.** $x-\operatorname{cth}x$. **1655.** $\ln|x+a|$. **1656.** $\frac{1}{22}(2x-3)^{11}$.

1657. $-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}$. **1658.** $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$. **1659.** $-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}$.

1660. $-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}$. **1661.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **1662.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}\times\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|$. **1663.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **1664.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}$.

1665. $-\left(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)$. **1666.** $-x\sin 5\alpha-\frac{1}{5}\cos 5x$. **1667.** $-\frac{1}{2}\times\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$. **1668.** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **1669.** $-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. **1670.** $-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$. **1671.** $\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]$. **1672.** $2\operatorname{th}\frac{x}{2}$. **1673.** $-2\operatorname{cth}\frac{x}{2}$.

1674. $-\sqrt{1-x^2}$. **1675.** $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}$. **1676.** $-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$. **1677.** $-\frac{1}{2(1+x^2)}$. **1678.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}$. **1679.** $\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|$. **1680.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **1681.** $\cos\frac{1}{x}$. **1682.** $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. **1683.** $-\arcsin\frac{1}{|x|}$. **1684.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. **1685.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **1686.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}$. **1687.** $2\operatorname{sgn}x\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})$ $(x(1+x)>0)$. **1688.** $2\arcsin\sqrt{x}$. **1689.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. **1690.** $\ln(2+e^x)$. **1691.** $\operatorname{arctg}e^x$. **1692.** $-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})$. **1693.** $\frac{1}{3}\ln^3x$. **1694.** $\ln|\ln(\ln x)|$. **1695.** $\frac{1}{6}\sin^6x$. **1696.** $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}$. **1697.** $-\ln|\cos x|$. **1698.** $\ln|\sin x|$. **1699.** $\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}$. **1700.** $\frac{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}{a^2-b^2}$ $(a^2\neq b^2)$. **1701.** $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3x}$. **1702.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$. **1703.** $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **1704.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1705.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$. **1706.** $2\operatorname{arctg}e^x$. **1707.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}\right)$. **1708.** $3\sqrt[3]{\operatorname{th}x}$. **1709.** $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2$. **1710.** $-\frac{1}{\arcsin x}$. **1711.** $\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})$. **1712.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. **1713.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$. **1714.** $-\frac{3x^{10}+x^5+1}{15(x^5+1)^3}$. **1715.** $\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)$ pentru $n\neq-2$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|$ pentru $n=-2$. **1716.** $-\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **1717.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)$. **1718.** $-\operatorname{arctg}(\cos 2x)$. **1719.** $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|$. **1720.** $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. **1721.** $\frac{4}{3}x^3-$

$-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7$. **1722.** $-x-2\ln|1-x|$. **1723.** $\frac{1}{2}(1-x)^2+\ln|1+x|$. **1724.** $9x-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-27\ln|3+x|$. **1725.** $x+\ln(1+x^2)$. **1726.** $\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right|+2\ln|2-x^2|-x$. **1727.** $\frac{1}{99(1-x)^{99}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+$ $+\frac{1}{97(1-x)^{97}}$. **1728.** $\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|$. **1729.** $\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]$. **1730.** $-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}$. **1731.** $-\frac{1+2x}{10}\times$ $\times(1-3x)^{\frac{2}{3}}$. **1732.** $\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}$. **1733.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|$. **1734.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. **1735.** $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1736.** $\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-$ $-\frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. **1737.** $\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}$. **1738.** $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}$. **1739.** $-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|$. **1740.** $\frac{1}{a^2-b^2}\times$ $\times\left(\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$ $(a\neq b)$. **1741.** $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$. **1742.** $\frac{x}{2}+$ $+\frac{1}{4}\sin 2x$. **1743.** $\frac{x}{2}\cos\alpha-\frac{1}{4}\sin(2x+\alpha)$. **1744.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x$. **1745.** $3\sin\frac{x}{6}+\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}$. **1746.** $-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$. **1747.** $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x$. **1748.** $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$. **1749.** $\frac{3}{8}x-$ $-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. **1750.** $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x$. **1751.** $-x-$ $-\operatorname{ctg}x$. **1752.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln|\cos x|$. **1753.** $-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x+$ $+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x-\frac{1}{192}\cos 12x$. **1754.** $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$. **1755.** $-\frac{1}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1756.** $\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg}x|$. **1757.** $\ln|\sin x|-$ $-\frac{1}{2}\sin^2 x$. **1758.** $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x$. **1759.** $x-\ln(1+e^x)$. **1760.** $x+$ $+2\operatorname{arctg}e^x$. **1761.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x$. **1762.** $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x$. **1763.** $\frac{2}{3}\operatorname{sh}^3x$. **1764.** $\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{1}{8}\operatorname{sh}4x$. **1765.** $-(\operatorname{th}x+\operatorname{cth}x)$. **1766.**

$-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}$. **1767.** $-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}$. **1768.** $-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}$. **1769.** $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}$. **1770.** $-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}$. **1771.** $\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{7}\sin^2x+\frac{2}{11}\sin^4x\right)\sqrt{\sin^3x}$. **1772.** $-\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2x)$. **1773.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x$. **1774.** $\frac{2}{3}(-5+$ $+\ln x)\sqrt{1+\ln x}$. **1775.** $x-2e^{-\frac{x}{2}}-2\ln\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)$. **1776.** $x-2\ln(1+$ $+\sqrt{1+e^x})$. **1777.** $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2$. **1778.** $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1779.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+$ $+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|$. **1780.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$. **1781.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. **1782.** $-\sqrt{a^2-x^2}+a\arcsin\frac{x}{a}$. **1783.** $-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+$ $+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$. **1784.** $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. **1785.** $\frac{2x-(a+b)}{4}\times$ $\times\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. **1786.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+$ $+\sqrt{a^2+x^2})$. **1787.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. **1788.** $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})$, dacă $x>a$; $-\sqrt{x^2-a^2}+$ $+2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})$, dacă $x<a$. **1789.** $2\ln(\sqrt{x+a}+$ $+\sqrt{x+b})$, dacă $x+a>0$ şi $x+b>0$; $-2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})$, dacă $x+a<0$ şi $x+b<0$. **1790.** $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\times$ $\times\ln\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})$, dacă $x+a>0$ şi $x+b>0$. **1791.** $x(\ln x-1)$. **1792.** $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)$ $(n\neq-1)$. **1793.** $-\frac{1}{x}(\ln^2x+2\ln x+2)$. **1794.** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)$. **1795.** $-(x+1)e^{-x}$. **1796.** $-\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)$. **1797.** $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}$. **1798.** $x\sin x+\cos x$. **1799.** $-\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x+\frac{x}{2}\sin 2x$. **1800.** $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$. **1801.** $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2x}{2}\right)\operatorname{sh}3x-$ $-\left(\frac{x^2}{3}+\frac{2}{27}\right)\operatorname{ch}3x$. **1802.** $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1803.** $x\arcsin x+$

$+\sqrt{1-x^2}$. **1804.** $-\frac{x}{2}+\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arctg} x$. **1805.** $-\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}+$ $+\frac{x^3}{3}\arccos x$. **1806.** $-\frac{\arcsin x}{x}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|$. **1807.** $x\ln(x+$ $+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. **1808.** $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **1809.** $-\sqrt{x}+(1+x)\times$ $\times\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. **1810.** $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg} x$. **1811.** $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}$. **1812.** $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$. **1813.** $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-$ $-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1814.** $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|+\frac{x^3}{3}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$. **1815.** $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x$. **1816.** $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. **1817.** $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$ $(a\neq 0)$. **1818.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\times$ $\times\arcsin\frac{x}{|a|}$ $(a\neq 0)$. **1819.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a}|$. **1820.** $\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$. **1821.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}\sin 2x\frac{\cos 2x}{8}$. **1822.** $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$. **1823.** $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}$. **1824.** $-\frac{(1-x)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. **1825.** $\frac{(1+x)e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}}$. **1826.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$. **1827.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$. **1828.** $\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. **1829.** $\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$. **1830.** $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$. **1831.** $\frac{x}{2}+$ $\frac{1}{4}\sin 2x-e^x(\cos x+\sin x)+\frac{1}{2}e^{2x}$. **1832.** $-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\times$ $\operatorname{arcctg}(e^x)$. **1833.** $-[x+\operatorname{ctg} x\cdot\ln(e\sin x)]$. **1834.** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|$. **1835.** $\frac{e^x}{x+1}$. **1836.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, dacă $ab>0$; $\frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|$, dacă $ab<0$. **1837.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$. **1838.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|$. **1839.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|$. **1840.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1841.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ($\alpha\neq k\pi$, k — întreg). **1842.** $\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}$.

1843. $\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}$. **1844.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|$. **1845.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}\right)$. **1846.** $\frac{1}{\sqrt{b}}\ln(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})$, dacă $b>0$; $\frac{1}{\sqrt{-b}}\times$ $\times\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)$, dacă $a>0$ şi $b<0$. **1847.** $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}$. **1848.** $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|$. **1849.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right)$. **1851.** $-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}$. **1852.** $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2+x+1}\right)$. **1853.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}$. **1854.** $\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}+$ $+\frac{1}{2}\ln|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}|$. **1855.** $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\times$ $\times\arcsin\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}$. **1856.** $-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|$. **1857.** $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\times$ $\times\arcsin\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}$ $\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. **1858.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x}\right|$. **1859.** $\arcsin\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}$ $(|x|>\sqrt{2})$. **1860.** $\frac{1}{5}\sqrt{x^2+2x-5}-\frac{1}{5\sqrt{5}}\times$ $\times\arcsin\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}$ $(|x+1|>\sqrt{6})$. **1861.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}$. **1862.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2}\right)$. **1863.** $\frac{x^2+1}{4}\times$ $\times\sqrt{x^4+2x^2-1}-\frac{1}{2}\ln|x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}|$. **1864.** $-\sqrt{1+x-x^2}+$ $+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. **1865.** $\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|$. **1866.** $\frac{8}{7}\ln|x-2|+\ln|x+5|$. **1867.** $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|$. **1868.** $\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-$ $-\frac{85x^2}{2}+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|$. **1869.** $x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|$. **1870.** $x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x-\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **1871.** $-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. **1872.** $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|$. **1873.** $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$. **1874.** $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+$ $+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|$. **1875.** $-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

1876. $\operatorname{arctg} x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}$. **1877.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$. **1878.** $-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arctg}(x-2)$. **1879.** $-\frac{1}{5(x-1)}+\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{8}{25}\times\operatorname{arctg}(x+1)$. **1880.** $\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$. **1881.** $\frac{1}{6}\times\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1882.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\times\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1883.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. **1884.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. **1885.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. **1866.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\times\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg} x^3$. **1887.** $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\times\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1888.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1889.** $\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{2}{5}\times\operatorname{arctg}(2x+1)$. **1890.** $a+2b+3c=0$. **1891.** $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **1892.** $\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1893.** $\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x$. **1894.** $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)$. **1895.** $\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\times\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}$. **1896.** $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1897.** $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\operatorname{arctg} x$. **1898.** $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$. **1899.** $-\frac{8x^4+8x^2+4x-1}{28(x^3+x+1)^2}$. **1900.** $-\frac{x}{x^5+x+1}$ (întreaga integrală). **1901.** $\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}-\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1902.** $a\gamma+c\alpha=2b\beta$. **1903.** $-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}$. **1904.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x^2$. **1905.** $\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{3}}$. **1906.** $\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$. **1907.** $\frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-\ln\frac{x^4}{x^4+1}$. **1908.** $-\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)$. **1909.** $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$. **1910.** $-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-$

$-\frac{1}{10}\operatorname{arctg}(x^5+1)$. **1911.** $\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)$ $(n\neq 0)$. **1912.** $\frac{1}{2n}\times\left(\operatorname{arctg} x^n-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right)$ $(n\neq 0)$. **1913.** $\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2}$. **1914.** $\frac{1}{10(x^{10}+1)}+\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}$. **1915.** $\frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}$. **1916.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|$. **1917.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\times\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. **1918.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}$. **1919.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}$. **1920.** $\operatorname{arctg} x+\frac{1}{5}\operatorname{arctg} x^3$. **1921.** $I_n=\frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}$, unde $\Delta=4ac-b^2$; $I_3=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\times\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **1922.** $I=\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}dt$; $\frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t}+3t-\frac{t^2}{2}-3\ln|t|\right)$, unde $t=\frac{x-2}{x+3}$. **1923.** $-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}+\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\times\ln|x-a|$. **1924.** $R(x)=P(x^2)+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ij}}{(a_i-x)^{\alpha_j}}+\frac{A_{ij}}{(a_i+x)^{\alpha_j}}\right]$, unde P este polinom, $\pm a_i$ $(i=1,\dots,k)$ sînt rădăcinile numitorilor, iar A_{ij} sînt coeficienţi constanţi. **1925.** $-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2n}\ln\left(1-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+x^2\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\frac{\pi(2k-1)}{2n}\operatorname{arctg}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right\}$. **1926.** $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})$. **1927.** $\frac{3}{4}\ln\frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt[3]{x})^3}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\times\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{7}}$. **1928.** $\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\frac{27}{8\sqrt{7}}\times\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}$, $t=\sqrt[3]{2+x}$. **1929.** $6t-3t^2-2t^3+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{5}t^5-\frac{6}{7}t^7+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arctg} t$, unde $t=\sqrt[6]{x+1}$. **1930.** $\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}$. **1931.** $\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. **1932.** $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. **1933.** $-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2}+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}$, unde $t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$.

1934. $-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}$. **1935.** $\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{x(1+x)}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$.
1937. $-\frac{3-2x}{4}-\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)$. **1938.** $-\ln\left|\frac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$.
1939. $\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}$. **1940.** $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})-$
$-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|$. **1941.** $\arcsin\frac{1+2x}{\sqrt{5}}+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|$.
1942. $\frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\frac{1-2x}{\sqrt{5}}$. **1943.** $-\frac{19+5x+2x^2}{6}\times$
$\times\sqrt{1+2x-x^2}-4\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}$. **1944.** $\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7+\frac{x^9}{10}\right)\times$
$\times\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **1945.** $\left(-\frac{a^4x}{16}-\frac{a^2x^3}{24}+\frac{x^5}{6}\right)\sqrt{a^2-x^2}+$
$+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}$. **1946.** $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{14x}{3}+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}-66\ln|x+2+$
$+\sqrt{x^2+4x+3}|$. **1947.** $-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$. **1948.** $\frac{x^2+2}{3x^3}\times$
$\times\sqrt{x^2-1}$. **1949.** $\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+1+2\sqrt{5(x^2+3x+1)}}{x-1}\right|$.
1950. $\frac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}$, unde $x<-2$ sau $x>0$. **1951.**
$4a(ca_1+bb_1)=8a^2c_1+3b^2a_1$ $(a\neq 0)$. **1952.** $\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times$
$\times\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|$. **1953.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$.
1954. $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$.
1955. $-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-2\arcsin\frac{1-x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{1+x}$. **1956.**
$-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}-2\arcsin\frac{1}{|x-2|}$ $(x<1$ sau $x>3)$. **1957.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\times$
$\times\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. **1958.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|$. **1959.** $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\times$
$\times\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. **1960.** $\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$. **1961.**
$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|$. **1962.** $\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\times$
$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$. **1963.** $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$. **1964.**

$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|$, dacă $x+$
$+1>0$. **1965.** $\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{|x+1|}$.
1966. $\frac{3}{2(2z+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1)|^3}$, unde $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$. **1967.**
$\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arctg}z$, unde $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$. **1968.** $\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}[(z-1)^3+\right.$
$\left.+(z-1)^{-3}]+[(z-1)^2-(z-1)^{-2}]+[(z-1)+(z-1)^{-1}]\right\}+\frac{1}{2}\times$
$\times\ln|z-1|$, unde $z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$. **1969.** $-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+$
$+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|-\frac{17}{108}\ln|z+1|$, unde $z=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$. **1970.**
$\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|$, unde $z=-x+\sqrt{x(1+x)}$. **1971.**
$\frac{x}{4}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|$. **1972.** $\frac{1}{3}\sqrt{z}-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\times$
$\times\left(\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^2}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^2}+1}-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3}-1}\right)$, unde $z=\frac{1+x}{1-x}$. **1973.** $\sqrt{1+x}-$
$-\sqrt{1-x}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x$. **1974.** $\sqrt{1+x+x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}$.
1975. $\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right]-\frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}\right]$. **1976.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}$.
1977. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|$. **1978.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}$ $(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1})$.
1979. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2(2x^2+1+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{x^2+2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}$. **1981.** $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\times$
$\times\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$ pentru $x>0$. **1982.** $\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+$
$+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\operatorname{arctg}x^{\frac{1}{6}}$. **1983.** $\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z$, unde $z=$
$=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$. **1984.** $-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{z^5}{5}$, unde $z=\sqrt{1-x^2}$. **1985.** $\frac{1}{6}\times$
$\times\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, unde $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **1986.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-$

$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z$, unde $z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$. **1987.** $\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}$, unde $z=\sqrt[6]{1+x^6}$. **1988.** $\frac{5}{4}z^4-\frac{5}{9}z^9$, unde $z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$. **1989.** $\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, unde $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$. **1990.** $m=\frac{2}{k}$, unde $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$ **1991.** $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$. **1992.** $\frac{5}{16}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x$. **1993.** $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x$. **1994.** $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}$. **1995.** $\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{2\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}$. **1996.** $-\frac{\cos 2x}{64}+\frac{\cos^3 2x}{96}-\frac{\cos^5 2x}{320}$. **1997.** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}$. **1998.** $-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **1999.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **2000.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **2001.** $-8\operatorname{ctg} 2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$. **2002.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\frac{3\operatorname{tg}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}+3\ln|\operatorname{tg} x|$. **2003.** $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **2004.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$. **2005.** $-x-\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}+\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg} x$. **2006.** $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$. **2007.** $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x}+\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$. **2008.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(1+t)^3(1+t^3)}{(1-t)^3(1-t^3)}\right|-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{1-t^2}{t\sqrt{3}}$ unde $t=\sqrt[3]{\sin x}$. **2009.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, $z=\sqrt{\operatorname{tg} x}$. **2010.** $\frac{1}{4}\ln\frac{(z^2+1)^2}{z^4-z^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z^2-1}{\sqrt{3}}$, unde $z=\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}$. **2011.** $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2}$; $I_6=-\frac{1}{6}\cos x\sin^5 x-\frac{5}{24}\cos x\sin^3 x-\frac{5}{16}\cos x\sin x+\frac{5}{16}x$; $K_8=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x$. **2012.** $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; $K_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}$; $I_5=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$; $K_7=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}+$

$+\frac{5}{16}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **2013.** $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{12}\cos 6x$. **2014.** $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}$. **2015.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}$. **2016.** $-\frac{1}{2}\cos(a-b)\cos x-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$. **2017.** $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2ax}{8a}+\frac{\sin 2bx}{8b}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}$. **2018.** $-\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 6x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{192}\cos 12x$. **2019.** $\frac{1}{\sin(a-b)}\times\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|$, dacă $\sin(a-b)\neq 0$. **2020.** $\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|$ dacă $\cos(a-b)\neq 0$. **2021.** $\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|$, dacă $\sin(a-b)\neq 0$. **2022.** $\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\cos a\neq 0)$. **2023.** $\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ $(\sin a\neq 0)$.

2024. $-x+\operatorname{ctg} a\cdot\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|$ $(\sin a\neq 0)$. **2025.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}$. **2026.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}$. **2027.** $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt{5}}\times\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg} 2}{2}\right)\right|$. **2028.** a) $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$, dacă $0<\varepsilon<1$; b) $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}$, dacă $\varepsilon>1$. **2029.** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$. **2030.** $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a\operatorname{tg} x}{b}\right)$. **2031.** $\frac{(2b^2)^{-1}z}{(a^2z^2+b^2)}+\frac{1}{2ab^3}\operatorname{arctg}\frac{az}{b}$, $(ab\neq 0,)$ unde $z=\operatorname{tg} x$. **2032.** $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. **2033.** $-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}$. **2034.** $-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)$. **2035.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)$. **2036.** $\frac{1}{4}\left\{\sqrt{2+\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}-\sqrt{2-\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right\}$ unde $u=\operatorname{tg} 2x$. **2037.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}$. **2038.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}^2 x+1)$.

2039. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x\right)$. 2040. $-\frac{z}{4(z^2+2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}}$, unde $z=\operatorname{tg} x$. 2041. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$, unde $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ şi $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 2043 $-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|$. 2044. $\frac{3x}{34}+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|$. 2045 $-\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a\sin x+b\cos x}+\frac{aa_1+bb_1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$, unde $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ şi $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2047. $-\frac{3x}{5}+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}$. 2048. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+\sin x+\cos x)$. 2049. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}\right|$.

2051. $-\sin x+3\cos x+2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. 2052. $\frac{1}{5}(\sin x+3\cos x)+\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}+1-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$. 2054. $-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$. 2055. $\frac{3}{5}\operatorname{arctg}(\sin x-2\cos x)+\frac{1}{10\sqrt{6}}\times\ln\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}$. 2056. $\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|-\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|$. 2058. $\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\times\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|$. 2059. $A=-\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $B=\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $C=-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}$. 2060. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}$. 2061. $2\sqrt{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x-1}$ $(\operatorname{tg} x>0)$.

2062. $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$. 2063. $-\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)}+\frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. 2064. $-\frac{2}{n\cos a}\left(\cos\frac{x+a}{2}\right)^n\left(\cos\frac{x-a}{2}\right)^{-n}$ $(\cos a\neq 0)$. 2065. $I_n=2I_{n-1}\cos a-I_{n-2}+\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}$, unde $n>2$ şi $t=\sin\frac{x-a}{2}\left(\sin\frac{x+a}{2}\right)^{-1}$. 2068. $e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)$. 2069 $-e^{-x}(x^2+2)$. 2070. $-\left(\frac{x^5}{5}-\frac{4x^3}{25}+\frac{24x}{625}\right)\cos 5x+\left(\frac{x^4}{5}-\frac{12x^2}{125}+\frac{24}{3125}\right)\sin 5x$. 2071. $(21-10x^2+x^4)\sin x-(20x-4x^3)\cos x$. 2072. $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^6+3x^4+6x^2+6)$. 2073. $2e^t(t^5-5t^4+20t^3-60t^2+120t-120)$, unde $t=\sqrt{x}$. 2074. $e^{ax}\left[\frac{1}{2a}+\frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{2(a^2+4b^2)}\right]$. 2075. $\frac{e^{ax}}{4}\left[\frac{3(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}-\frac{a\sin 3bx-3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}\right]$. 2076. $\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]$. 2077. $\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\sin x+(\sin x-\cos x)]$. 2078. $e^x\left[\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right]$. 2079. $\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}x^2+3x^2\cos x-x\left(6\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)-\left(5\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x$. 2080. $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})$. 2082. $x+\frac{1}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$. 2083. $e^x-\ln(1+e^x)$. 2084. $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$. 2085. $x-3\ln\left\{\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right\}-3\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{6}}$. 2086. $x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}$. 2087. $-2\arcsin\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$. 2088. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin(e^{-x})$. 2089. $\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1})-\arcsin\frac{2e^x-1}{e^x\sqrt{5}}$. 2090. $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\times$

$\times \ln \frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}$. **2092.** $a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\ldots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0$.
2093. $e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)$. **2094.** $-e^{-x}-\mathrm{li}\,(e^{-x})$. **2095.** $e^4\,\mathrm{li}\,(e^{2x-4})-$ $-e^2\,\mathrm{li}\,(e^{2x-2})$. **2096.** $\frac{e^x}{x+1}$. **2097.** $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+$ $+64e^4\,\mathrm{li}\,(e^{2x-4})$. **2098.** $x\,[\ln^n x-n\ln^{n-1}x+n(n-1)\ln^{n-2}x+\ldots$ $\ldots+(-1)^{n-1}n(n-1)\ldots 2\ln x+(n-1)^n n!]$. **2099.** $\frac{x^4}{4}\left(\ln^3 x-\frac{3}{4}\times\right.$ $\left.\times\ln^2 x+\frac{3}{8}\ln x-\frac{3}{32}\right)$. **2100.** $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)$. **2101.** $\ln(x+a)\ln(x+b)$. **2102.** $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+$ $+\sqrt{1+x^2})+2x$. **2103.** $-\frac{x}{2}+x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x$.
2104. $\frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **2105.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+$ $\frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,(x+1)$. **2106.** $-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+\frac{2x\sqrt{x}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{x}$. **2107.** $-\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2})+\frac{2x^2-3}{2}\arcsin(1-x)$. **2108.** $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\times$ $\times\arcsin\sqrt{x}$. **2109.** $-\frac{\mathrm{sgn}\,x}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}$. **2110.** $-2\,\mathrm{sgn}\times$ $\times(1-x)\sqrt{x}+(1+x)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. **2111.** $\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}$.
2112. $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **2113.** $x-\mathrm{arctg}\,x+\left(\frac{1+x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x-\right.$ $\left.-\frac{x}{2}\right)[\ln(1+x^2)-1]$. **2114.** $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **2115.** $-\ln\sqrt{1+x^2}+$ $+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **2116.** $-\frac{x}{8}+\frac{\mathrm{sh}\,4x}{32}$. **2117.** $\frac{3x}{8}+\frac{\mathrm{sh}\,2x}{4}+$ $+\frac{\mathrm{sh}\,4x}{32}$. **2118.** $\frac{\mathrm{ch}^3 x}{3}-\mathrm{ch}\,x$. **2119.** $\frac{\mathrm{ch}\,6x}{24}-\frac{\mathrm{ch}\,4x}{16}-\frac{\mathrm{ch}\,2x}{8}$. **2120.** $\ln\mathrm{ch}\,x$. **2121.** $x-\mathrm{cth}\,x$. **2122.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+\frac{1}{2}\arcsin(e^{-2x})$.
2123. $\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\,\mathrm{th}\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$. **2124.** $\frac{a\,\mathrm{ch}\,ax\sin bx-b\,\mathrm{sh}\,ax\cos bx}{a^2+b^2}$.
2125. $\frac{a\,\mathrm{ch}\,ax\cos bx+b\,\mathrm{sh}\,ax\sin bx}{a^2+b^2}$. **2126.** $-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\mathrm{arctg}\,x$.

2127. $\frac{1}{8}\cdot\frac{x+x^3}{(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **2128.** $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1-x^2}{x}$.
2129. $2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)\,(x\geqq 0)$. **2130.** $-\frac{1}{24}(15+$ $+10x+8x^2)\sqrt{x(1-x)}+\frac{5}{8}\arcsin\sqrt{x}\,(0<x<1)$. **2131.** $-\frac{2}{x}\times$ $\times\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}(|x|<1)$. **2132.** $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}\,(x>0)$.
2133. $\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}$. **2134.** $\frac{1}{2}\ln\frac{(1+z)^2}{1-z+z^2}-\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$, unde $z=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$. **2135.** $-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{1+x^3+x^6}}{x^3}\right|$. **2136.** $\frac{1}{2}\arccos\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}$. **2137.** $-\frac{2+x^2}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x\,(|x|<1)$.
2138. $-\frac{1}{2}(1+x)^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|$ $(x>0;\ x<-1)$. **2139.** $-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times$ $\times\,\mathrm{arctg}\,\frac{1+2x}{\sqrt{3}}$. **2140.** $-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\times$ $\times\arccos(2x-3)\,(1<x<2)$. **2141.** $-x^2+\frac{x^2}{2}\ln(4+x^4)+2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x^2}{2}$.
2142. $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+\ln|x|\,(0<|x|<1)$. **2143.** $(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. **2144.** $-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{x^2+1}+$ $+\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{3}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}(|x|>1)$. **2145.** $\left(\frac{3-x}{1-x}-\right.$ $\left.-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin x-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\,(0<x<1)$. **2146.** $\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}$. **2147.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+4\sqrt{2}+\cos 4x}{7-4\sqrt{2}-\cos 4x}$.
2148. $\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}$. **2149.** $a\left[x\,\mathrm{arctg}\,x-\right.$ $\left.-\frac{1}{2}(\ln x^2+1)\right]-\frac{a-b}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2$. **2150.** $a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln|x^2-1|\right)+$ $+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **2151.** $-\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\quad(x>0)$.

2152. $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 2153. $-\ln(1+\cos 2x+\sqrt{1+\cos^4 x})$. 2154. $-\frac{6x+x^3}{9}-\frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2}\arccos x$ $(|x|<1)$. 2155. $-\frac{x^2}{6}-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{arctg}\,x+\frac{1}{2}(\mathrm{arctg}\,x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)$. 2156. $-\frac{x}{4(1+x^2)}-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\,\mathrm{arcctg}\,x$. 2157. $\frac{1}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\times\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}$ $(|x|<1)$. 2158. $-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{8}(\arcsin x)^2$ $(|x|<1)$. 2159. $\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}+\frac{1}{4}(1+x^2)^2\,\mathrm{arcctg}\,x$. 2160. x^x $(x>0)$. 2161. $x-e^{-x}\arcsin(e^x)-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})$ $(x<0)$. 2162. $x-\ln(1+e^x)-2e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{arctg}\,e^{\frac{x}{2}}-\left(\mathrm{arctg}\,e^{\frac{x}{2}}\right)^2$. 2163. $-\frac{\mathrm{cth}\,1}{4}[x-\ln(1+e^x\,\mathrm{ch}\,1)]-\frac{e^{-x}}{4\,\mathrm{sh}\,1}$. 2164. $-2\ln(\mathrm{th}\,x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2 x})+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{th}^2 x}+\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{th}^2 x}-\sqrt{2}\,\mathrm{th}\,x}$. 2165. $e^x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. 2166. $\frac{x|x|}{2}$. 2167. $\frac{x^2|x|}{3}$. 2168. $\frac{2x^2}{3}(x+|x|)$. 2169. $\frac{(1+x)|1+x|}{2}+\frac{(1-x)|1-x|}{2}$. 2170. e^x-1, dacă $x<0$; $1-e^{-x}$, dacă $x\geqq 0$. 2171. x, dacă $|x|\leqq 1$; $\frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}\times\mathrm{sgn}\,x$, dacă $|x|>1$. 2172. $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}$, unde $(x)=x-[x]$. 2173. $\frac{[x]}{\pi}\{[x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\}$. 2174. $x-\frac{x^3}{3}$ pentru $|x|\leqq 1$; $x-\frac{x}{2}|x|+\frac{1}{6}\,\mathrm{sgn}\,x$ pentru $|x|>1$. 2175. x, dacă $-\infty<x\leqq 0$; $\frac{x^2}{2}+x$, dacă $0\leqq x\leqq 1$; $x^2+\frac{1}{2}$, dacă $x>1$. 2176. $xf'(x)-f(x)$. 2177. $\frac{1}{2}f(2x)$. 2178. $f(x)=2\sqrt{x}$. 2179. $x-\frac{x^3}{3}$. 2180. $f(x)=x$ pentru $-\infty<x\leqq 0$; $f(x)=e^x-1$ pentru $0<x<+\infty$.

CAPITOLUL IV

2181. $12\frac{1}{2}$. 2182. a) $\underline{S}_n=16\frac{1}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$, $\overline{S}_n=16\frac{1}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$; b) $\underline{S}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$, $\overline{S}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$; c) $\underline{S}_n=\frac{10\,230}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$, $\overline{S}_n=\frac{10\,230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$. 2183. $\underline{S}=31\cdot\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$; $\frac{31}{5}$. 2184. $v_0t+\frac{1}{2}gt^2$. 2185. 3. 2186. $\frac{a-1}{\ln a}$. 2187. 1. 2188. $\sin x$. 2189. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. 2190. $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. 2191. $\ln\frac{b}{a}$. 2192. a) 0, dacă $|\alpha|<1$; b) $\pi\ln\alpha^2$, dacă $|\alpha|>1$. 2201. In general, nu. 2203. Nu neapărat. 2206. $11\frac{1}{4}$. 2207. 2. 2208. $\frac{\pi}{6}$. 2209. $\frac{\pi}{3}$. 2210. 1. 2211. 1. 2212. $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$. 2213. $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. 2214. $\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}$. 2215. $\frac{\pi}{2|ab|}$. 2216. a) Funcţia de sub semnul integrală $\frac{1}{x}$ şi primitiva sa $\ln|x|$ sînt discontinue în intervalul de integrare [—1, 1]; b) funcţia $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)$ fiind primitivă, este discontinuă pentru $0\leqq x\leqq 2\pi$; c) funcţia $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$ este discontinuă pentru $x=0$. 2217. $\frac{2}{3}$. 2218. $200\sqrt{2}$. 2219. $\frac{1}{2}$. 2220. $\ln 2$. 2221. $\frac{\pi}{4}$. 2222. $\frac{2}{\pi}$. 2223. $\frac{1}{p+1}$. 2224. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 2225. $\frac{1}{e}$. 2226. $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. 2227. $\frac{5}{6}\pi$. 2228.

$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **2229.** $x+\frac{1}{2}$. **2230.** $\frac{1}{\ln 2}$. **2231.** 0; $-\sin a^2$; $\sin b^2$. **2232.** a) $2x\sqrt{1+x^4}$; b) $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$; c) $(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$. **2233.** a) 1; b) $\frac{\pi^2}{4}$; c) 0. **2235.** 1. **2237.** a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{t^2}{2}$. **2238.** a) $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}$, dacă $\alpha<0$; $\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^3}{3}$, dacă $0\leqq\alpha\leqq 1$; $\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3}$, dacă $\alpha>1$; b) $\frac{\pi}{2}$, dacă $|\alpha|\leqq 1$; $\frac{\pi}{2\alpha^2}$, dacă $|\alpha|>1$; c) 2, dacă $|\alpha|\leqq 1$; $\frac{2}{|\alpha|}$, dacă $|\alpha|>1$. **2239.** $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$. **2240.** π. **2241.** 4π. **2242.** $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$. **2243.** 1. **2244.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **2245.** $\frac{1}{6}$. **2246.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **2247.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$. **2248.** $2-\frac{\pi}{2}$. **2249.** $\frac{\pi^2}{4}$. **2250.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2251.** a) Funcţia inversă $x=\pm t^{3/2}$ are două determinări; b) funcţia $x=\frac{1}{t}$ este discontinuă pentru $t=0$; c) nu există o ramură continuă şi uniformă a funcţiei $x=\operatorname{arctg} t$ definită pe un segment finit care să parcurgă valorile de la 0 pînă la π. **2252.** Nu. **2253.** Este posibil. **2256.** $f(x+b)-f(x+a)$. **2260.** $\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$. **2261.** $\int_0^1[f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\,dt+\int_{-1}^0[f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]\,dt$. **2262.** $4n$. **2263.** $\frac{\pi^2}{4}$. **2264.** $\operatorname{arctg}\frac{32}{27}-2\pi$. **2268.** $315\frac{1}{26}$. **2269.** $\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$. **2270.** $\frac{5}{27}e^3-\frac{1}{9}$. **2271.** $-66\frac{6}{7}$. **2272.** $-\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. **2273.** $\frac{29}{270}$. **2274.** $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$. **2275.** $2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. **2276.** $2\pi\sqrt{2}$. **2277.** $\frac{1}{6}$. **2278.** $\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$. **2279.** $\frac{3}{5}(e^{\pi}-1)$. **2280.** $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$. **2281.** $I_n=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$, dacă $n=2k$; $I_n=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$, dacă $n=2k+1$. **2282.** v. 2281. **2283.** $(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right]$. **2284.** $2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. **2285.** v. 2281. **2286.** $I_n=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$. **2287.** $I_n=(-1)^n\times$

$\times\left\{-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}$. **2290.** $\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}$. **2291.** 0, dacă n este par; π, dacă n este impar. **2292.** $(-1)^n\pi$. **2293.** $\frac{\pi}{2^n}$. **2294.** $\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$. **2295.** 0. **2296.** 0. **2297.** $\frac{1}{2^{2n}a}(1-e^{-2a\pi})\times\left[C_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right]$. **2298.** $\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}$. **2299.** $\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$. **2302.** In punctele de discontinuitate ale funcţiei $f(x)$ derivata $F'(x)$ poate să existe şi să nu existe. **2303.** $|x|+C$. **2304.** $\arccos(\cos x)+C$. **2305.** $x[x]-\frac{[x]([x]+1)}{2}+C$. **2306.** $\frac{x^2[x]}{2}-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}+C$. **2307.** $C+\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)$. **2308.** $\frac{1}{2}(|l+x|-|l-x|)+C$. **2309.** -1. **2310.** $14-\ln 7!$. **2311.** $\frac{30}{\pi}$. **2312.** $-\frac{\pi^2}{4}$. **2313.** $\ln n!$. **2314.** $-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}$. **2315.** $\frac{8}{3}$. **2316.** a) $-$; b) $+$; c) $+$; d) $-$. **2317.** a) A doua; b) a doua; c) prima. **2318.** a) $\frac{1}{3}$; b) $6\frac{2}{3}$; c) 10; d) $\frac{1}{2}\cos\varphi$. **2319.** $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b$, unde b este semiaxa mică a elipsei. **2320.** $v_m=\frac{1}{2}(v_0+v_1)$, unde v_1 este viteza finală a corpului. **2321.** $\frac{1}{2}i_0^2$. **2322.** a) $\theta=\sqrt{\frac{1}{n+1}}$; b) $\theta=\frac{1}{e}$; c) $\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$, $\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\theta=1$. **2323.** $\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\theta\ (|\theta|<1)$. **2324.** Este cuprinsă între $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ şi $\frac{1}{10}$. **2325.** $0{,}01-0{,}005\theta\ (0<\theta<1)$. **2328.** $\frac{\theta}{50\pi}\ (0<\theta<1)$. **2329.** $\frac{2}{a}\theta\ (|\theta|<1)$. **2330.** $\frac{\theta}{a}\ (|\theta|<1)$. **2334.** $\frac{1}{a}$. **2335.** -1. **2336.** π. **2337.** π. **2338.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **2339.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. **2340.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2341.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2342.** $\frac{\pi}{2}$. **2343.** $\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **2344.** 0. **2345.** $\frac{\pi}{2}-1$. **2346.** $\frac{a}{a^2+b^2}$. **2347.** $\frac{b}{a^2+b^2}$. **2348.** $I_n=n!$ **2349.** $I_n=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n+\frac{1}{2}}}$. **2350.** $I_n=n!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$, unde C_n^k este numărul combinărilor de n elemente luate cîte k. **2351.** $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$, dacă n este par, şi

$I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, dacă n este impar. **2352.** $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}\pi$, dacă n este par; $I_n=\frac{(n-1)!!}{n!!}$, dacă n este impar. **2353.** a) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$; b) $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. **2354.** $\frac{2\sqrt[4]{8}\,e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}$. **2356.** a) 1; b) $\frac{\pi}{2}$; c) 0. **2357.** a) 1; b) $\frac{1}{3}$; c) 1; d) $\frac{1}{\alpha}f(0)$. **2358.** Convergentă. **2359.** Convergentă. **2360.** Divergentă. **2361.** Convergentă pentru $p>0$. **2362.** Convergentă dacă $p>-1$ şi $q>-1$. **2363.** Convergentă dacă $m>-1$ şi $n-m>1$. **2364.** Convergentă pentru $1<n<2$. **2365.** Convergentă pentru $1<n<2$. **2366.** Convergentă dacă $m>-2$ şi $n-m>1$. **2367.** Convergentă pentru $n>0$ $(a\neq 0)$. **2368.** Divergentă. **2369.** Convergentă dacă $p<1$ şi $q<1$. **2370.** Convergentă pentru $n>-1$. **2371.** Convergentă dacă $\min(p, q)<1$ şi $\max(p, q)>1$. **2372.** Convergentă. **2373.** Convergentă. **2374.** Convergentă dacă $p>1$ şi $q<1$, **2375.** Convergentă pentru $p>1$, q arbitrar, $r<1$ şi pentru $p=1$, $q>1$, $r<1$. **2376.** Convergentă dacă $p_i<1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ şi $\sum_{i=1}^{n} p_i>1$. **2377.** Convergentă dacă $P_n(x)$ nu are rădăcini în intervalul $(0, +\infty)$ şi $n>m+1$. **2378.** Nu este absolut convergentă. **2379.** Nu este absolut convergentă. **2380.** Absolut convergentă dacă $-1<\frac{p+1}{q}<0$; simplu convergentă dacă $0\leq\frac{p+1}{q}<1$. **2381.** Absolut convergentă dacă $p>-2$, $q>p+1$; simplu convergentă dacă $p>-2$, $p<q\leq p+1$. **2382.** Simplu convergentă pentru $0<n<2$. **2383.** Absolut convergentă pentru $n>m+1$; simplu convergentă pentru $m<n\leq m+1$. **2385.** Nu. **2392.** $\ln\frac{1}{2}$. **2393.** 0. **2394.** π. **2395.** 0. **2397.** $\frac{a^2}{3}$. **2398.** $4\frac{1}{2}$. **2399.** $4\frac{1}{2}$. **2400.** $9{,}9-8{,}1\lg e\approx 6{,}38$. **2401.** $\frac{\pi}{2}$. **2402.** πa^2. **2403.** πab. **2404.** $\frac{4}{3}a^3$. **2405.** $\frac{88}{15}\sqrt{2}\,p^2$. **2406.** $\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$. **2407.** $3\pi a^2$. **2408.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **2409.** $\frac{2\pi}{n+2}$. **2410.** $\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\approx 0{,}546$. **2411.** $(3\pi+2):(9\pi-2)$. **2412.** $x=a\operatorname{ch}\frac{S}{a^2}$, $y=a\operatorname{sh}\frac{S}{a^2}$. **2413.** $3\pi a^2$. **2414.** $\frac{8}{15}$. **2415.**

$\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$. **2416** $6\pi a^2$. **2417.** $\frac{3\pi}{8}\cdot\frac{c^4}{ab}$. **2418.** a^2. **2419.** $\frac{3\pi a^2}{2}$. **2420.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **2421.** $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$. **2422.** $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. **2423.** $(\pi-1)\frac{a^2}{4}$. **2424.** $\frac{1}{2}\left(1-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$. **2425.** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)a^2$. **2426.** $\frac{3}{2}a^2$. **2427.** $\pi a^2\sqrt{2}$. **2428.** a^2. **2429.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2430.** $\frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}}$. **2431.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **2432.** $2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}+p\ln\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}$. **2433.** $\sqrt{h^2-a^2}$. **2434.** $x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}$. **2435.** $\frac{e^2+1}{4}$. **2436.** $a\ln\frac{a+b}{a-b}-b$. **2437.** $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$. **2438.** $a\ln\frac{a}{b}$. **2439.** $4a\left(1+3\sqrt{3}\ln\frac{3}{2}\right)$. **2440.** $6a$. **2441.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. **2442.** $1+\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$. **2443.** $8a$. **2444.** $2\pi^2 a$. **2445.** $2\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}-\sqrt{\operatorname{ch}T-1}\right)-\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{T}{2}+\sqrt{\operatorname{ch}T}}{1+\sqrt{2}}$. **2446.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **2447.** $\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a$. **2448.** $8a$. **2449.** $p[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. **2450.** $\frac{3\pi a}{2}$. **2451.** $a(2\pi-\operatorname{th}\pi)$. **2452.** $2+\frac{1}{2}\ln 3$. **2455.** $\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}\approx 0{,}73$. **2456.** $\frac{bh}{6}(2a+c)$. **2457.** $\frac{h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. **2458.** $\frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b]$. **2459.** $\frac{1}{2}SH$. **2462.** $\frac{2}{3}abc$. **2463.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **2464.** $\frac{8\pi abc}{3}$. **2465.** $\frac{16}{3}a^3$. **2466.** $\frac{2}{3}R^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **2467.** $\frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}$. **2468.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **2469.** $\frac{2}{15}$. **2470.** $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}a^3$. **2472.** $\frac{3}{7}\pi ab^2$. **2473.** a) $\frac{16\pi}{15}$; b) $\frac{8\pi}{3}$. **2474.** a) $\frac{\pi^2}{2}$; b) $2\pi^2$. **2475.** a) $\frac{4}{15}\pi ab^2$; b) $\frac{\pi a^2 b}{6}$. **2476.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) 2π. **2477.** $2\pi^2a^2b$. **2478.** $\frac{22\pi a^3}{9}$. **2479.** $\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}$.

2480. a) $5\pi^2a^3$; b) $6\pi^3a^3$; c) $7\pi^2a^3$. **2481.** a) $\frac{32}{105}\pi ab^2$; b) $\frac{32}{105}\pi a^2b$. **2483.** a) $\frac{8}{3}\pi a^3$; b) $\frac{13}{4}\pi^2a^3$. **2484.** a) $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\right]$; b) $\frac{\pi^2a^3}{4\sqrt{2}}$; c) $\frac{\pi^2a^3}{4}$. **2485.** $\frac{\pi^2a^3}{2\sqrt{2}}$. **2486.** $\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$. **2487.** $2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}}{2b}$. **2488.** $\pi\left[(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$. **2489.** a) $\frac{2\pi}{3}[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2]$; b) $\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right]$. **2490.** a) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$; b) $2\pi a^2+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$, unde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ este excentricitatea elipsei. **2491.** $4\pi^2ab$. **2492.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **2493.** a) $\pi a\left(2b+a\,\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right)$; b) $2\pi a\left(a+b\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}-a\,\mathrm{ch}\frac{b}{a}\right)$. **2494.** $4\pi a^2$. **2495.** a) $\frac{64}{3}\pi a^2$; b) $16\pi^2a^2$; c) $\frac{32}{3}\pi a^2$. **2496.** $\frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2}-1)$. **2497.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. **2498.** a) $2\pi a^2(2-\sqrt{2})$; b) $2\pi a^2\sqrt{2}$; c) $4\pi a^2$. **2499.** $\frac{5}{128\sqrt[3]{10}}\times[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]\approx 1{,}013$. **2500.** $V=\frac{4\pi}{3}p^2$; $P=2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})]$. **2501.** $M_1=2a^2$; $M_2=\frac{\pi a^3}{2}$. **2502.** $M_1=\frac{bh^2}{6}$; $M_2=\frac{bh^3}{12}$. **2503.** $M_2^{(x)}=\frac{\pi ab^3}{4}$; $M_2^{(y)}=\frac{\pi a^3b}{4}$. **2504.** $M_1=\frac{\pi r^2h^2}{12}$; $M_2=\frac{\pi}{30}r^2h^3$. **2507.** $x_0=a\frac{\sin\alpha}{\alpha}$; $y_0=0$. **2508.** $\left(\frac{9}{20}a,\ \frac{9}{20}a\right)$. **2509.** $\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. **2510.** $\left(0,\ 0,\ \frac{3}{8}a\right)$. **2511.** $\varphi_0=\varphi-\alpha$ unde $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{1}{2m}$; $r_0=\frac{mr}{\sqrt{1+4m^2}}$. Spirala logaritmică $r_0=\frac{am}{\sqrt{1+4m^2}}e^{m(\varphi_0+\alpha)}$. **2512.** $\varphi_0=0$, $r_0=\frac{5}{6}a$. **2513.** $x_0=\pi a$, $y_0=\frac{5}{6}a$. **2514.** $x_0=\frac{2}{3}a$, $y_0=0$. **2515.** $\left(0,\ 0,\ \frac{a}{2}\right)$. **2516.** 75 kg. **2517.** $A_h=mg\frac{Rh}{R+h}$, unde R este raza pămîntului; $A_\infty=\mathrm{mg}R$. **2518.** 0,5 kgm. **2519.** 1740 kgm. **2520.** $\frac{2}{3}a^3$. **2521.** $708\frac{1}{3}T$. **2522.** $v_0T+\frac{a}{2}T^2$. **2523.** $\frac{4}{15}\pi\delta\omega^2R^5$. **2524.** Proiecţiile

forţei de atracţie pe axele de coordonate sînt: $X=0$, $Y=-\frac{2km\mu_0}{a}$, unde k este constanta gravitaţională. **2525.** $2\pi km\delta_0\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$, unde k este constanta gravitaţională. **2526.** Aproximativ 3 ore. **2527.** Vasul trebuie să fie mărginit de suprafaţa formată prin rotaţia curbei $y=Cx^4$ în jurul axei verticale Oy. **2528.** $Q=Q_0\times 2^{-\frac{t}{1600}}$. **2529.** $99{,}92\%$. **2530.** $\frac{\gamma H^2}{6E}$.

In răspunsurile referitoare la calcularea cu aproximaţie a integralelor definite sînt date valorile din tabele. **2531.** $-6{,}2832$. **2532.** 0,69315. **2533.** 0,83566. **2534.** 1,4675. **2535.** 17,333. **2536.** 5,4024. **2537.** 1,37039. **2538.** 0,2288. **2539.** 0,915966. **2540.** 3,14159. **2541.** 1,463. **2542.** 0,3179. **2543.** 0,8862. **2544.** 51,04.

2545.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0,99	1,65	1,85	1,72	1,52	1,42

CAPITOLUL V

2546. $\frac{2}{3}$. 2547. $\frac{3}{2}$. 2548. 3. 2549. 1. 2550. $\frac{1}{3}$. 2551. a) $\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$; b) $\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}$. 2552. $1-\sqrt{2}$. 2553. Convergentă numai pentru $x=k\pi$ (k număr întreg). 2556. Divergentă. 2557. Divergentă. 2558. Convergentă. 2559. Divergentă. 2560. Divergentă. 2561. Divergentă. 2562. Convergentă. 2563. Convergentă. 2564. Divergentă. 2566. Poate fi atît convergentă cît şi divergentă. 2567. a) Poate fi atît convergentă cît şi divergentă; b) divergentă. 2578. Convergentă. 2579. Convergentă. 2580. Convergentă. 2581. a) Convergentă; b) divergentă. 2582. Convergentă. 2583. Convergentă. 2584. Convergentă. 2585. Convergentă. 2586. Convergentă. 2587. Divergentă. 2588. Divergentă. 2589. Convergentă. 2590. Convergentă. 2595. Convergentă. 2596. Convergentă. 2597. Convergentă. 2598. Divergentă pentru $p>2$. 2599. Convergentă pentru $\frac{b-a}{\text{[illegible]}}>1$. 2600. Convergentă pentru $p>\frac{3}{2}$. 2601. Convergentă. 2602. Convergentă pentru $p+q>1$. 2603. Convergentă pentru $q>p$. 2604. Convergentă pentru $\frac{p}{2}+q>1$. 2605. Convergentă pentru $x>1-p$. 2607. Convergentă pentru $q>p+1$. 2608. Convergentă pentru $p\geq 0$. 2609. Convergentă pentru $p>0$. 2610. Convergentă pentru $p>\frac{1}{2}$. 2611. Convergentă pentru $b\neq 1$. 2612. Convergentă pentru $p>1$. 2613. Divergentă. 2614. Divergentă. 2616. Convergentă pentru $x<\frac{1}{e}$. 2617. Convergentă. 2618. Divergentă. 2619. Convergentă pentru $p>1$. 2620. Convergentă pentru $p>1$, q oarecare şi pentru $p=1$, $q>1$. 2621. Divergentă.

2623. 1,20. 2626. Convergentă pentru $\alpha>\frac{1}{2}$. 2627. Convergentă dacă $a=\frac{1}{2}$. 2628. Divergentă. 2629. Convergentă. 2630. Convergentă pentru $\alpha>2$. 2631. Convergentă. 2632. Convergentă. 2633. Convergentă. 2634. Convergentă dacă $c=0$, $\frac{a}{d}<-1$. 2635. Divergentă. 2636. Convergentă dacă $a\neq 0$. 2637. Convergentă. 2638. Divergentă. 2639. Convergentă. 2640. Convergentă dacă $a=\sqrt{bc}$. 2641. Convergentă dacă $\alpha<-1$. 2642. Convergentă dacă $\alpha>\frac{1}{2}$. 2643. Convergentă pentru $a^b>e$, $c=0$ şi pentru $a^c>1$. 2644. Convergentă pentru $a+b>1$. 2645. Convergentă. 2646. Convergentă. 2647. Convergentă. 2648. Divergentă. 2649. Convergentă. 2650. Convergentă. 2651. Convergentă. 2652. Convergentă pentru $\alpha>2$. 2653. Convergentă. 2654. Convergentă. 2655. a) $N>100\,000$; b) $N>12$; c) $N>4$. 2659. $\frac{2}{9}$. 2660. $1\frac{3}{7}$. 2661. $\ln 2$. 2662. a) $\frac{3}{2}\ln 2$; b) $\frac{1}{2}\ln 2$. 2664. Convergentă. 2665. Convergentă. 2666. Convergentă. 2667. Convergentă. 2668. Convergentă. 2669. Convergentă. 2670. Divergentă. 2671. Convergentă. 2672. Convergentă. 2673. Divergentă. 2675. Absolut convergentă pentru $p>1$; simplu convergentă pentru $0<p\leq 1$. 2676. Absolut convergentă pentru $p>1$; simplu convergentă pentru $0<p\leq 1$. 2677. Absolut convergentă pentru $p>1$; simplu convergentă pentru $\frac{1}{2}<p\leq 1$. 2678. Absolut convergentă pentru $|x-\pi k|<\frac{\pi}{4}$ (k număr întreg); simplu convergentă pentru $x=\pi k\pm\frac{\pi}{4}$. 2679. Simplu convergentă pentru orice x diferit de un număr întreg negativ. 2680. Absolut convergentă pentru $p>1$; simplu convergentă pentru $0<p\leq 1$. 2681. Absolut convergentă pentru $p>2$; simplu convergentă pentru $1<p\leq 2$. 2682. Absolut convergentă pentru $p>1$; simplu convergentă pentru $\frac{1}{2}<p\leq 1$. 2683. Simplu convergentă. 2684. Absolut convergentă. 2685. Divergentă. 2686. Simplu convergentă. 2687. Absolut convergentă pentru $p>1$; simplu convergentă pentru $\frac{1}{2}<p\leq 1$. 2688. Divergentă. 2689. Absolut convergentă pentru $p>2$; simplu conver-

gentă pentru $0 < p \leq 2$. **2690.** Convergentă. **2691.** Divergentă. **2692.** Absolut convergentă pentru $q > p + 1$; simplu convergentă pentru $p < q \leq p + 1$. **2693.** Absolut convergentă pentru $p > 1$, $q > 1$; simplu convergentă pentru $0 < p = q \leq 1$. **2694.** Absolut convergentă pentru $p > 1$, simplu convergentă pentru $p = 1$. **2695.** Absolut convergentă pentru $p > 1$; simplu convergentă pentru $p = 1$. **2696.** Absolut convergentă pentru $p > 1$, $q > 1$; simplu convergentă pentru $0 < p = q \leq 1$. **2698.** a) $p > 1$; b) $0 < p \leq 1$. **2699.** a) $q > p+1$, b) $p < q \leq p+1$. **2700.** Absolut convergentă pentru $m \geq 0$; simplu convergentă pentru $-1 < m < 0$. **2706.** a) Divergenţă; b) poate fi atît convergentă cît şi divergentă. **2707.** $\frac{2}{3}$. **2708.** $\frac{3}{4}$. **2709.** $-\frac{2}{7}$. **2710.** $\frac{y(1+x)}{1-xy}$. **2716.** Absolut convergentă pentru $|x| > 1$. **2717.** Absolut convergentă pentru $x > 0$; simplu convergentă pentru $x = 0$. **2718.** Absolut convergentă pentru $x > -\frac{1}{3}$ şi pentru $x < -1$. **2719.** Absolut convergentă pentru $|x| \neq 1$ şi simplu convergentă pentru $x = -1$. **2720.** Absolut convergentă pentru $-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3}$ şi pentru $\frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6}$. **2721.** Absolut convergentă pentru $|x - \pi k| \leq \frac{\pi}{6}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **2722.** Absolut convergentă pentru $p > 1$ şi $x \neq k$ $(k = -1, -2, \ldots)$ şi simplu convergentă pentru $0 < p \leq 1$; $x \neq k$. **2723.** Absolut convergentă pentru $q > p + 1$ şi simplu convergentă pentru $p < q \leq p+1$. **2724.** Absolut convergentă pentru $|x| < 1$. **2725.** Absolut convergentă pentru $|x| < 1$. **2726.** Absolut convergentă pentru $|x| \neq 1$. **2727.** Absolut convergentă pentru $x \neq -1$. **2728.** Absolut convergentă pentru $x > 0$. **2729.** Absolut convergentă pentru $0 < |x| < +\infty$ dacă $|a| > 1$; divergentă dacă $|a| \leq 1$ sau dacă $x = 0$. **2730.** Absolut convergentă pentru $x = 2$ şi pentru $x > e$. **2731.** Absolut convergentă pentru $x > 1$. **2732.** Convergentă dacă $0 < \min(x, y) < 1$. **2733.** Absolut convergentă pentru $|x| < 1$, $0 \leq y < +\infty$ şi pentru $|x| > 1, y > |x|$; simplu convergentă în punctul $x = -1$, $y = 1$. **2734.** Absolut convergentă pentru $\max(|x|, |y|) < 1$. **2735.** Absolut convergentă pentru: 1) $0 \leq x < 1$, $-\infty < y < +\infty$; 2) $x = 1$, $y > 1$ şi 3) $x > 1$, $y > 2$. **2736.** Absolut convergentă pentru $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$, k număr întreg. **2738.** $\frac{1}{2} < |x| < 2$; $\frac{6x(x^2-1)}{(2-x)^2(2x-1)^2}$. **2739.** a) Absolut convergentă pentru $x \geq 0$, simplu

convergentă pentru $-1 < x < 0$; b) absolut convergentă pentru $p + x > 1$ şi pentru $x = 0, 1, 2, \ldots$; simplu convergentă pentru $0 < p + x \leq 1$; c) absolut convergentă pentru: 1) $|x| < 1$, y oarecare; 2) $x = \pm 1$, $y > \frac{1}{2}$; 3) x oarecare, $y = 0, 1, 2, \ldots$; simplu convergentă pentru $x = 1$, $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$. **2743.** Pentru $\varepsilon = 0{,}001$ şi $x = \sqrt[m]{0{,}1}$, $N \geq 3m$. Nu. **2744.** $n > \frac{1}{\varepsilon}$. **2745.** $n \geq 1\,000\,000$. **2746.** a) uniform convergentă; b) nu este uniform convergentă; **2747.** Uniform convergentă. **2748.** Nu este uniform convergentă. **2749.** Uniform convergentă. **2750.** Uniform convergentă. **2751.** a) Uniform convergentă; b) nu este uniform convergentă; c) uniform convergentă. **2752.** a) Nu este uniform convergentă; b) uniform convergentă. **2753.** Uniform convergentă. **2754.** Nu este uniform convergentă. **2755.** a) Uniform convergentă. b) Nu este uniform convergentă. **2756.** a) Nu este uniform convergentă; b) uniform convergentă. **2757.** Nu este uniform convergentă. **2758.** a) Uniform convergentă; b) nu este uniform convergentă. **2759.** Uniform convergentă. **2760.** a) Uniform convergentă; b) nu este uniform convergentă. **2761.** Uniform convergentă. **2762.** Uniform convergentă. **2763.** Nu este uniform convergentă. **2767.** a) Uniform convergentă; b) nu este uniform convergentă. **2768.** Uniform convergentă. **2769.** Nu este uniform convergentă. **2770.** Uniform convergentă. **2771.** Nu este uniform convergentă. **2772.** Uniform convergentă. **2773.** a) Nu este uniform convergentă; b) uniform convergentă. **2775.** a) Uniform convergentă: b) nu este uniform convergentă **2776.** Nu este uniform convergentă. **2777.** Uniform convergentă. **2778.** Uniform convergentă. **2779.** Uniform convergentă. **2780.** Uniform convergentă. **2781.** Uniform convergentă. **2782.** Uniform convergentă. **2783.** Poate. **2785.** Nu neapărat. **2795.** a) Există şi este continuă pentru $|x| < 1$; b) există şi este continuă pentru $|x| < +\infty$; c) există pentru $|x| < +\infty$, este discontinuă pentru $x = 0$. **2799.** a) Există, este derivabilă pentru $x \neq -k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$; b) există pentru $|x| < +\infty$, este derivabilă peste tot în afară de punctul $x = 0$. **2802.** a) α este arbitrar; b) $\alpha < 1$; c) $\alpha < 2$. **2805.** Nu. **2806.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **2807.** 1. **2808.** 1. **2809.** Este permis. **2810.** Da. **2812.** $R = 1$; $(-1, 1)$ absolut convergentă pentru $x = -1$ dacă $p > 1$ şi simplu convergentă dacă $0 < p \leq 1$; absolut convergentă pentru $x = 1$.

dacă $p>1$ şi divergentă dacă $p\leqq 1$. **2813.** $R=\frac{1}{3}$; $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Pentru $x=-\frac{4}{3}$ simplu convergentă; pentru $x=-\frac{2}{3}$ divergentă. **2814.** $R=4$; $(-4, 4)$. Pentru $x=\pm 4$ divergentă. **2815.** $R=+\infty$; $-\infty \quad +\infty)$. **2816.** $R=\frac{1}{e}$; $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. Pentru $x=\pm\frac{1}{e}$ divergentă. **2817.** $R=+\infty$; $(-\infty, +\infty)$. **2818.** $R=2$; $(-1, 3)$. Absolut convergentă pentru $x=-1$, dacă $p>2$, şi simplu convergentă dacă $0<p\leqq 2$; absolut convergentă pentru $x=3$ dacă $p>2$ şi divergentă dacă $p\leqq 2$. **2819.** $R=2^p$; $(-2^p, 2^p)$. Absolut convergentă pentru $x=-2^p$ dacă $p>2$ şi divergentă dacă $p\leqq 2$; absolut convergentă pentru $x=2^p$ dacă $p>2$ şi simplu convergentă dacă $0<p\leqq 2$ **2820.** $R=1$; $(-1, 1)$. Absolut convergentă pentru $x=-1$ dacă $m\geqq 0$ şi divergentă dacă $m<0$; absolut convergentă pentru $x=1$ dacă $m\geqq 0$ şi simplu convergentă dacă $-1<m<0$. **2821.** $R=\min\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}\right)$; $(-R, R)$. Simplu convergentă pentru $x=-R$ dacă $a\geqq b$ şi absolut convergentă dacă $a<b$; divergentă pentru $x=R$ dacă $a\geqq b$ şi absolut convergentă dacă $a<b$. **2822.** $R=\max(a, b)$; $(-R, R)$. Divergenţă pentru $x=\pm R$. **2823.** $R=1$; $(-1, 1)$. Absolut convergentă pentru $x=\mp 1$ dacă $a>1$ şi divergentă dacă $a\leqq 1$. **2824.** $R=1$; $(-1, 1)$. Absolut convergentă pentru $x=\pm 1$. **2825.** $R=1$; $(-1, 1)$. Simplu convergentă pentru $x=-1$; divergentă pentru $x=1$. **2826.** $R=1$; $(-1, 1)$. Divergentă pentru $x=-1$; simplu convergentă pentru $x=1$. **2827.** $R=1$; $(-1, 1)$. Divergentă pentru $x=\pm 1$. **2828.** $R=\frac{1}{4}$; $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Divergentă pentru $x=\pm\frac{1}{4}$. **2829.** $R=\frac{1}{3}$; $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Divergentă pentru $x=\pm\frac{1}{3}$. **2830.** $R=1$; $(-1, 1)$. Absolut convergentă pentru $x=\pm 1$. **2831.** $R=1$; $(-1, 1)$. Simplu convergentă pentru $x=\pm 1$. **2832.** $R=1$; $(-1, 1)$. Absolut convergentă pentru $x=-1$ dacă $\gamma-\alpha-\beta>0$ şi simplu convergentă dacă $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$; absolut convergentă pentru $x=1$ dacă $\gamma-\alpha-\beta>0$ şi divergentă dacă $\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$. **2833.** $x>0$. **2834.** $|x|>\frac{1}{2}$. **2835.** $0<|x|<+\infty$. **2836** $x>-1$. **2837.** $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4}$, unde k—număr întreg. **2838.** $-1+3(x+1)-3(x+1)^2+(x+1)^3$. **2839.** a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}}$ $(|x|<|a|)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$ $(|x-b|<|a-b|)$; c) $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{x^{n+1}}$ $(|x|>|a|)$. **2840.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ $(0<x\leqq 2)$; $\ln 2$. **2841.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty)$. **2842.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(|x|<+\infty)$. **2843.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x|<+\infty)$. **2844.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$. **2845.** $\mu x+\frac{\mu(1^2-\mu^2)}{3!}x^3+\frac{\mu(1^2-\mu^2)(3^2-\mu^2)}{5!}\cdot x^5+\ldots$ $(|x|<1)$. **2846.** $1-\frac{\mu^2}{2!}x^2-\frac{\mu^2(2^2-\mu^2)}{4!}x^4-\ldots$ $(|x|<1)$. **2847.** $1+(x-1)+(x-1)^2+\frac{(x-1)^3}{2}+\ldots$ $(0<x<2)$. **2848.** $e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\ldots\right)$ $(|x|<1)$. **2849.** $\sin(x+h)=\sin x+h\cos x-\frac{h^2}{2!}\sin x-\frac{h^3}{3!}\cos x+\ldots$ $(|h|<+\infty)$; $\cos(x+h)=\cos x-h\sin x-\frac{h^2}{2!}\cos x+\frac{h^3}{3!}\sin x+\ldots$ $(|h|<+\infty)$. **2850.** a) $(-2, 2)$; b) $(3, 7)$. **2851.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $(|x|<+\infty)$. **2852.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(|x|<+\infty)$. **2853.** $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $(|x|<+\infty)$. **2854.** $\sum_{n=10}^{\infty}x^n$ $(|x|<1)$. **2855.** $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ $(|x|<1)$. **2856.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}$ $\left(-\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2}.\right)$ **2857.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$. **2858.** $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-2)^n]x^n$ $\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$. **2859.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{6^n}\right]x^n$ $(|x|<1)$. **2860.** $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n$ $(|x|<1)$. **2861.** $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, unde $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}+(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}\right]$ (numerele lui Fibonacci). **2862.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}$ $(|x|<1)$. **2863.** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos na$

$(|x|<1)$. **2864.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin na\ (|x|<1)$. **2865.** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} na\ (|x|<e^{-|a|})$. **2866.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n}\ (|x|<1)$. **2867.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+[1+(-1)^n](-1)^{\frac{n}{2}+1}}{n} x^n$ $(-1<x\leqq 1)$. **2868.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} x^n\ (|x|<+\infty)$. **2869.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|\leqq 1)$; $\frac{\pi}{4}$. **2870.** $x+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ (|x|\leq 1)$. **2871.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n \times \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\}\ (|x|\leqq 1)$. **2872.** $-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n\ (|x|\leq 1)$. **2873.** a) $x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\ (-1\leqq x\leqq 1)$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}\ (-1<x<1)$; c) $\operatorname{arctg} 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}\left(-\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}\right)$; d) $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \times \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)}\right\}(-\sqrt{2}\leqq x\leqq \sqrt{2})$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}\ (-1\leqq x\leqq 1)$; f) $2|x|\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n}}{2n+1}\right\}(-1\leqq x\leqq 1)$; g) $\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\times\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\right\}(-1\leqq x\leqq 1)$; h) $\frac{x^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{x^{2n+2}}{2n+1}\ (-1\leqq x\leqq 1)$. **2874.** a) $e^{x^2}\left[(2x)^n+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}+\ldots\right]$. b) $\frac{(-1)^n}{x^{2n}}e^{\frac{a}{x}}\left[a^n+\frac{n(n-1)}{1!}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}a^{n-2}x^2+\ldots\right]$; c) $\frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x^2)^n}\left[x^{n-1}-\frac{(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\times x^{n-5}-\ldots\right]$. **2875.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n}\ (-2\leqq x\leqq 0)$. **2876.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\ (|x|>1)$. **2877.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}\ (x>0)$. **2878.** $\frac{x}{1+x}+$

$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}\left(x>-\frac{1}{2}\right)$. **2881.** $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{24}x^3-\ldots\ (|x|<1)$. **2882.** $1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)}{n!}x^n\ (|x|<+\infty)$ **2883.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{2}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-4)!}\right]x^n\ (|x|<+\infty)$, unde $0!=1$. $(-1)!=\infty$, $(-2)!=\infty$ etc. **2884.** $2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\leq x<1)$. **2885.** $x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}\ (|x|\leq 1)$. **2886.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$ $(|x|<+\infty)$. **2887.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\ (|x|<+\infty)$. **2888.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n-1}\times\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n\right\}(-1<x\leqq 1)$. **2889.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{x^{2n}}{n}\ (|x|\leqq 1)$. **2890.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}\ (|x|\leqq 1)$. **2891.** $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. **2892.** $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\ldots\left(|x|<\frac{\pi}{2}\right)$. **2893.** $-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5-\ldots(|x|<\pi)$. **2894.** $E_0=0$, $\sum_{k=0}^{n}\left\{(-1)^k\times\frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}\right\}=0$. **2895.** $P_0(x)=1$; $P_n(t)=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\right](n\geqq 1)$ (polinoamele lui Legendre). **2896.** $\sum_{n=0}^{\infty}s_n x^n$, unde $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$. **2897.** a) $R\geq\min.(R_1,R_2)$; b) $R\geqq R_1R_2$. **2901.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\ (|x|<+\infty)$. **2902.** $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\ (|x|\leq 1)$. **2903.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\ (|x|<+\infty)$.

2904. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n-1)^2}\,(|x|\leqq 1)$. **2905.** $x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{36}+\frac{x^4}{96}-\ldots\,(|x|<1)$. **2906.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\,(|x|<1$. **2907.** $\operatorname{arctg} x\,(|x|\leq 1)$. **2908.** $\operatorname{ch} x\,(|x|<+\infty)$. **2909.** $1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\,(|x|\leqq 1)$. **2910.** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,(-1\leqq x<1$. **2911.** $\frac{x}{(1-x)^2}\,(|x|<1)$. **2912.** $\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}\,(|x|<1)$. **2913.** $\frac{2x}{(1-x)^3}\,(|x|<1)$. **2916.** $R=2$; $(x-1)^2+(y-1)^2<4$. **2917.** $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x^2+y^2<\frac{1}{2}$. **2918.** $R=1$; $x^2+y^2<1$. **2919.** $R=1$; $x^2+y^2<1$. **2920.** $R=\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\right|$; $(x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2<4\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **2921.** 2,080. **2922.** a) $0{,}87606=\operatorname{arc} 50°11'40''$; b) 1,99527; c) 0,60653; d) 0,22314. **2923.** 0,30902. **2924.** 0,999848. **2925.** 0,158. **2926.** 2,718282. **2927.** 0,1823. **2928.** 3,1416. **2929.** 3,142. **2930.** 3,141592654. **2931.** $\ln 2=0{,}69315$; $\ln 3=1{,}09861$. **2932.** a) 0,747; b) 2,835; c) 1,605; d) 0,905; e) 1,057; f) 0,119; g) 0,337; h) 0,927; i) 8,041; j) 0,488; k) 0,507; l) 0,783. **2933.** 3,82. **2934.** 4,84. **2935.** 20,02 m. **2936.** $\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$. **2937.** Seria Fourier coincide cu polinomul $P_n(x)$.

2938. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$; $\frac{\pi}{4}$. **2939.** $\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi x}{l}$.

2940. $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. **2941.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. **2942.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2943.** $\frac{(a-b)\pi}{4}-\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$. **2944.** $\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$.

2945. $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{a\cos nx}{n^2-a^2}\right]$. **2946.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}$. **2947.** $\frac{2\operatorname{sh}\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2+a^2}$. **2948.**

$2\operatorname{sh}\frac{ah}{\pi}\left[\frac{1}{2ah}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{ah\cos nx-\pi n\sin nx}{(ah)^2+(\pi n)^2}\right]$. **2949.** $a+l+\frac{2l}{\pi}\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}-\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)(a<x<a+2l)$. **2950.** $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$. **2951.** $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$.

2952. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}\right\}$. **2953.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x$.

2954. $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2955.** $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}$ ($x\neq$ număr întreg). **2956.** $\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2\pi(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **2957.** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$.

2958. $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx$. **2959.** $\frac{\alpha}{1-\alpha^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\cos nx$.

2960. $\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[2+\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{m\pi}{2}\right]\cos(8k+4)x\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(-1)^k\left[\frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{16}{\pi}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m-1}\sin(2m-1)\frac{\pi}{4}\right]\times\cos 8kx\right\}$. **2961.** a) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\;(-\pi\leqq x\leqq\pi)$; b) $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}\;(0\leqq x<\pi)$; c) $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\;(0<x<2\pi)$; $\frac{\pi^2}{6}$, $\frac{\pi^2}{12}$, $\frac{\pi^2}{8}$. **2962.** $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$; $x^4=\frac{1}{5}\pi^4+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\times\cos nx$. **2963.** $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$; $\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}$. **2964.** $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\times$

$\times \cos\frac{2\pi nx}{3} + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^2}$ $(0 \leqq x \leqq 3)$. **2965.** $\frac{1}{2^m} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{m-1}} \times \sum_{k=1}^{m} C_{2m}^{m-k}\cos 2kx$. **2966.** $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$ $(|q|<1)$. **2967.** $1+2\times \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx$ $(|q|<1)$. **2968.** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$. **2969.** $-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx$. **2970.** $-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$. **2971.** $-\ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n}$. **2972.** $-2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}$. **2973.** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2}$. **2974.** $x(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\times \sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$; $y(s)=\frac{a}{2}-\frac{4a}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi s}{2a}+\frac{4a}{\pi^2}\times \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi s}{2a}$. **2975.** $f(-x)=f(x)$; $f(\pi-x)=-f(x)$. **2976.** $f(-x)=-f(x)$; $f(\pi-x)=f(x)$. **2977.** a) $-\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{(2k+1)^2}-\frac{8}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\right]\cos(2k+1)x\right\}\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$; b) $\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}+\frac{8}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^3}\right]\sin(2k+1)x\right\}\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$. **2978.** $a_{2n}=b_{2n}=0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. **2979.** $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. **2980.** a) $a_n=0$, $b_{2k-1}=0$; b) $a_n=0$, $b_{2k}=0$. **2981.** $\alpha_n=a_n$, $\beta_n=-b_n$. **2982.** $\alpha_n=-a_n$, $\beta_n=b_n$. **2983.** $\bar{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh$, $\bar{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh$. **2984.** $A_0=a_0$, $A_n=a_n\frac{\sin nh}{nh}$, $B_n=b_n\frac{\sin nh}{nh}$ $(n=1, 2, \ldots)$. **2935.** $A_0=a_0^2$, $A_n=a_n^2+b_n^2$; $B_n=0$ $(n=1, 2, \ldots)$. **2986.** $\frac{1}{2}$. **2937.** $\frac{1}{4}$. **2988.** $2\ln 2-1$. **2989.** $\frac{1}{4}$. **2990.** $\frac{1}{m}\times\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}\right)$. **2991.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **2992.** $\frac{3}{4}$. **2993.** 1. **2994.** $2(1-\ln 2)$. **2995.** $2e$. **2993.** $3e^2$. **2997.** $\frac{\pi^2}{3}-3$. **2998.** $\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}$.

2999. $\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1)$. **3000.** $\frac{1}{6}(4\ln 2-1)$. **3001.** $e^x(\alpha_m x^m+\alpha_{m-1}x^{m-1}+\ldots+\alpha_0)$, unde coeficienţii α_k $(k=0, 1, \ldots, m)$ se determină din egalitatea $P(n)=\alpha_m n(n-1)\ldots(n-m+1)+\alpha_{m-1}n\times(n-1)\ldots(n-m+2)+\ldots+\alpha_1 n+\alpha_0$. **3002.** $e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)$. **3003.** $\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)e^{-x}-\frac{1}{x}$. **3004.** $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\cos x-\frac{x}{2}\sin x$. **3005.** $\frac{1}{4}\times\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\operatorname{sh}\sqrt{x}-\operatorname{ch}\sqrt{x}\right)$, dacă $x\geqq 0$; $\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}}\sin\sqrt{|x|}-\cos\sqrt{|x|}\right)$, dacă $x<0$. **3006.** $\ln\frac{1}{1-x}$. **3007.** $2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)$ $(|x|\leqq 1)$. **3008.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x|<1)$. **3009.** $(1-x)^{-\frac{a}{d}}-1$ $(|x|<1)$. **3010.** $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}-1$. **3011.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$. **3012.** $\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$ $(|x|<1)$. **3013.** $(1+2x^2)e^{x^2}$. **3014.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\ln 2$. **3015.** $\frac{\pi}{4}$. **3016.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **3017.** $\frac{\pi}{2}$. **3018.** $\frac{\pi-x}{2}$ $(0<x<2\pi)$. **3019.** $-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|$ $(0<x<2\pi)$. **3020.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin\frac{x+\alpha}{2}}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\right|$. **3021.** $\frac{\pi}{4}$, dacă $0<x<2\alpha$; 0, dacă $\alpha<x<2\pi-2\alpha$; $-\frac{\pi}{4}$, dacă $2\pi-2\alpha<x<2\pi$. **3022.** $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x$ $(|x|<\pi)$. **3023.** $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sin x$ $(|x|<\pi)$. **3024.** $\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x|$ $(|x|\leqq\pi)$. **3025.** $\frac{x}{2}(1+\cos x)-\sin x\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$ $(|x|<\pi)$. **3026.** $e^{\cos x}\times\cos(\sin x)$ $(|x|<+\infty)$. **3027.** $x=i\pi$, $y=j\pi$ $(i, j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **3028.** $2(\arcsin x)^2$ $(|x|\leqq 1)$. **3029.** $\frac{4}{4-x}+\frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}$, dacă $x\geqq 0$; $\frac{4}{4-x}-\frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{\sqrt{|x|}+\sqrt{4-x}}{2}$, dacă $x<0$. **3030.** $\frac{1}{x-1}$. **3031.** $\frac{a_1}{x}$. **3032.** a) $\frac{x}{1-x}$; b) $\frac{1}{1-x}$. **3033.** a) $\frac{x^2}{(1-x)^2}$; b) $\frac{x}{(x-1)^2}$.

3034. 1. **3035.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}$. **3036.** $\frac{\pi^2}{12}$. **3037.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(p+nq)}$. **3038.** $2-\frac{\pi^2}{6}$. **3039.** $\frac{1}{24}$. **3040.** $\frac{\pi^2}{12}$. **3041.** $F(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right\}$. **3042.** $E(k)=\frac{\pi}{2}\left\{1-\right.$ $\left.-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}$. **3043.** $2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\ldots\right]$, unde ε este excentricitatea elipsei. **3047.** $\frac{2\pi a^n}{n!}$. **3048.** $\ln(1+\alpha)$ pentru $|\alpha|<1$ şi $\frac{1}{a^2}\ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$ pentru $|\alpha|>1$. **3049.** 0 pentru $|\alpha|\leqq 1$ şi $\pi\ln\alpha^2$ pentru $|\alpha|>1$. **3050.** $2\cdot 10^{-6}$. **3061.** $\frac{1}{4}$. **3062.** 2. **3063.** $\frac{3}{7}$. **3064.** $a^{-\ln 2}$. **3065.** a) Nu; b) da; c) da; d) da. **3066.** Diverge către zero. **3067.** Convergent. **3068.** Convergent pentru $p>1$. **3069.** Diverge către zero. **3070.** Convergent pentru orice p. **3071.** Convergent dacă $a_1=a$. **3072.** Convergent dacă $\sum_{i=1}^{p} a_i=\sum_{i=1}^{p} b_i$. **3073.** Diverge către zero. **3074.** Convergent. **3075.** Convergent. **3076.** Convergent. **3077.** Convergent pentru orice x. **3078.** Convergent pentru orice x. **3079.** Convergent pentru $|x|<1$. **3080.** Convergent pentru $|x|<2$. **3081.** Convergent pentru $|x|>e$. **3082.** Convergent pentru orice x. **3083.** Convergent pentru $|x|<1$, p, q fiind arbitrari, şi pentru $x=\pm 1$, $p>1$, $q>\frac{1}{2}$. **3084.** Convergent pentru orice x şi p. **3085.** Divergent. **3088.** Simplu convergent. **3089.** Divergent. **3090.** Absolut convergent dacă $p>1$; simplu convergent dacă $\frac{1}{2}<p\leqq 1$. **3091.** Divergent. **3092.** Divergent. **3093.** Divergent. **3094.** Simplu convergent. **3095.** Simplu convergent. **3096.** Divergent. **3097.** Absolut convergent pentru $\alpha>1$; simplu convergent pentru $\frac{1}{2}<\alpha\leqq 1$. **3109.** $F'(x)=F(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$; $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|<+\infty$, $|f_n'(x)|<c_n$ $(n=1,\ 2,\ldots)$, unde $\sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty$. **3111.** $157{,}970+\theta\cdot 0{,}0004$ $(0<\theta<1)$. **3112.** $10^{2866}\cdot 7{,}7\cdot\left(1+\frac{\theta}{12\,000}\right)$ $(|\theta|<1)$. **3113.** $0{,}0798\cdot\left(1+\frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta|<1)$.

3114. $10^{28}\cdot 1{,}378\cdot\left(1+\frac{\theta}{288}\right)$ $(|\theta|\leqq 1)$. **3115.** $10^{42}\cdot 4{,}792\cdot\left(1+\frac{\theta}{120}\right)$ $(|\theta|\leqq 1)$. **3116.** $0{,}124\cdot\left(1+\frac{\theta}{300}\right)$ $(|\theta|<1)$. **3117.** $0{,}355\cdot\left(1+\frac{\theta}{600}\right)$ $(|\theta|<1)$. **3118.** $(2n-1)!!=\sqrt{2}(2n)^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$ $(|\theta_n|<1)$. **3119.** $\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}e^{\frac{\theta_n}{6n}}$ $(|\theta_n|<1)$. **3120.** a) 1; b) e; c) $\frac{e}{2}$; d) 1. **3121.** $P_3(x)=1-\frac{55}{21}x-\frac{1}{14}x^2+\frac{5}{42}x^3$, $P_3(-1)\approx 3{,}43$; $P_3(1)=-1{,}57$; $P_3(6)\approx 0{,}57$. **3122.** $y=y_0+ +\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}(x-x_0)^2$. **3123.** $y=0{,}808+ +0{,}193x-0{,}00101x^2$. **3124.** $\sin x^0\approx\frac{5x}{288}\left[1-\left(\frac{x}{150}\right)^2\right]$; $\sin 20°\approx 0{,}341$; $\sin 40°\approx 0{,}645$; $\sin 80°\approx 0{,}994$. **3125** $P(x)=\frac{1}{3}(7x^2-4x^4)$. **3126.** $7\frac{1}{3}$. **3127.** $B_n(x)=x$; $B_n(x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n}$; $B_n(x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\times \times\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3+\frac{3}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n^2}x$. **3123.** $B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}l\right)\times \times C_n^i\frac{(x-a)^i(b-x)^{n-i}}{l^n}$, unde $l=b-a$. **3129.** $B_n(x)=\frac{1}{8}(1-x)\times \times(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4$. **3130.** $B_{2n}(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1-x^2}{4}\right)^n\sum_{i=1}^{n}iC_{2n}^{n-i}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^i+ +\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^i\right]$. **3131.** $B_n(x)=e^{ka}\left[1+\left(e^{\frac{kl}{n}}-1\right)\frac{x-a}{l}\right]^n$, unde $l=b-a$. **3132.** $B_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n+\left(\cos\frac{\pi}{2n}-i\frac{2x}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^n\right]$, unde $i=\sqrt{-1}$. **3135.** $\sigma_{2n-1}(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{2n-1}\cdot\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

CAPITOLUL VI

3136. Semiplanul $y \geq 0$. **3137.** $|x| \leq 1$; $|y| \geq 1$. **3138.** Cercul $x^2+y^2 \leq 1$. **3139.** Exteriorul cercului $x^2+y^2>1$. **3140.** Coroana circulară $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$. **3141.** Lunula $x \leq x^2+y^2<2x$. **3142.** $-1 \leq x^2+y \leq 1$. **3143.** Semiplanul $x+y<0$. **3144.** Perechea de unghiuri verticale $|y| \leq |x|$ $(x \neq 0)$. **3145.** Perechea de unghiuri verticale obtuze, formate de dreptele $y=0$ şi $y=-2x$, inclusiv frontiera, cu excepţia vîrfului comun $O(0, 0)$. **3146.** Triunghiul curbiliniu mărginit de parabolele $y^2=x$, $y^2=-x$ şi de dreapta $y=2$, în afară de vîrful $O(0, 0)$. **3147.** Familia de coroane concentrice $2\pi k \leq x^2+y^2 \leq \pi(2k+1)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$. **3148.** Exteriorul conului $x^2+y^2-z^2=0$ împreună cu frontiera sa, exceptînd vîrful. **3149.** Mulţimea a patru octanţi din spaţiu. **3150.** Interiorul hiperboloidului cu două pînze $x^2+y^2-z^2=-1$. **3151.** Drepte paralele. **3152.** Cercuri concentrice. **3153.** Familia de hiperbole echilatere avînd asimptotele comune $y=\pm x$. **3154.** Drepte paralele. **3155.** Fascicul de drepte avînd vîrful în originea coordonatelor, cu excepţia acestui vîrf. **3156.** Familie de elipse asemenea. **3157.** Mulţimea hiperbolelor echilatere care se apropie asimptotic de axele de coordonate, situate în cadranele *I* şi *III*. **3158.** Familie de linii poligonale formate din cîte două segmente ale căror vîrfuri sînt situate pe axa Oy. **3159.** Cadranele *I* şi *III* pentru $z=0$; familia de linii poligonale formate din cîte două segmente paralele cu axele de coordonate avînd vîrfurile situate pe dreapta $x+y=0$ pentru $z>0$. **3160.** Fasciculul de cercuri care trece prin originea coordonatelor (cu excepţia originii) şi ortogonale cu axa Ox. **3161.** Curbele $y=\frac{C}{\ln x}$. **3162.** Curbele $y=\frac{C+x}{\ln x}$. **3163.** Familia de cercuri cu centrele pe axa Ox. ortogonale cu cercul $x^2+y^2=a^2$. **3164.** Familia de cercuri ortogonale cu axa Oy care trec prin punctele $(-a, 0)$, $(a, 0)$, excepţie făcînd aceste puncte. **3165.** Dreptele $x=m\pi$ şi $y=n\pi$ $(m, n=0, \pm 1,$

$\pm 2, \ldots)$ pentru $z=0$; sistemul de pătrate $m\pi<x<(m+1)\pi$, $n\pi<y<(n+1)\pi$, unde $(-1)^{m+n}=z$, pentru $z=-1$ sau $z=1$. **3166.** Familie de plane paralele. **3167.** Familia de sfere concentrice cu centrul în originea coordonatelor. **3168.** Familie de hiperboloizi cu două pînze pentru $u<0$; familie de hiperboloizi cu o pînză pentru $u>0$; con pentru $u=0$. **3169.** Familia de cilindri eliptici a căror axă comună este dreapta $x+y=0$, $z=0$. **3170.** Familia de sfere concentrice $x^2+y^2+z^2=\pi n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, pentru $u=0$; familia de straturi sferice $\pi n<x^2+y^2+z^2<\pi(n+1)$, unde $(-1)^n=u$ pentru $u=-1$ sau $u=1$. **3171.** Suprafaţa cilindrică de directoare $z=f(y)$, $x=0$, ale cărei generatoare sînt paralele cu dreapta $y=ax$, $z=0$. **3172.** Suprafaţa de rotaţie a curbei $z=f(x)$, $y=0$ în jurul axei Oz. **3173.** Suprafaţa conică cu vîrful în originea coordonatelor şi de directoare: $x=1$, $z=f(y)$. **3174.** Conoidul de directoare: $x=1$, $z=f(y)$, ale cărui generatoare sînt paralele cu planul Oxy. **3176.** $f\left(1, \frac{y}{x}\right)=f(x, y)$. **3177.** $\sqrt{1+x^2}$. **3178.** $f(t)=2t+t^2$; $z=x-1+\sqrt{y}$ $(x>0)$. **3179.** $f(x)=x^2-x$; $z=2y+(x-y)^2$. **3180.** $f(x, y)=x^2\frac{1-y}{1+y}$. **3184.** a) 0, 0; b) $\frac{1}{2}$, 1; c) 0, 1; d) 0, 1; e) 1, ∞. **3185.** 0. **3186.** 0. **3187.** a. **3188.** 0. **3189.** 0. **3190.** 0. **3191.** e. **3192.** 1. **3193.** a) $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$ şi $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$. **3194.** Punct de discontinuitate: $x=0$, $y=0$. **3195.** Toate punctele dreptei $x+y=0$. **3196.** $O(0, 0)$ este un punct de discontinuitate infinită; punctele dreptei $x+y=0$ $(x \neq 0)$ sînt puncte de discontinuitate neesenţială. **3197.** Punctele sînt situate pe axele de coordonate. **3198.** Mulţimea punctelor de pe dreptele $x=m\pi$ şi $y=n\pi$ $(m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **3199.** Punctele cercului $x^2+y^2=1$. **3200.** Punctele planelor de coordonate: $x=0$, $y=0$, $z=0$. **3201.** (a, b, c). **3212.** $f'_x(x, 1)=1$. **3213.** $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-16xy$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$. **3214.** $\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=1-\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}$. **3215.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{2}{y^3}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{6x}{y^4}$. **3216.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}$. **3217.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y)$, $\frac{\partial u}{\partial y}=$

$= x\cos(x+y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \cos(x+y) - x\sin(x+y),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x\sin(x+y)$. **3218.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x\sin x^2}{y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2\sin x^2 + 4x^2\cos x^2}{y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{2x\sin x^2}{y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2\cos x^2}{y^3}$. **3219.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}\sec^2\frac{x^2}{y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2x}{y^2}\sec^2\frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3}\sec^2\frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4}\sin\frac{x^2}{y}\sec^3\frac{x^2}{y}$. **3220.** $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1},\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^y\ln x\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1}(1 + y\ln x),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y\ln^2 x\ (x>0)$. **3221.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$. **3222.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. **3223.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}\ (xy \neq 1)$. **3224.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn} y}{(x^2+y^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}\ (y \neq 0)$. **3225.** $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$. **3226.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\ \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z(z-1)}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z(z+1)}{y^2}\left(\frac{x}{y}\right)^z,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln^2\frac{x}{y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{z^2}{xy}\left(\frac{x}{y}\right)^z\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z\left(1 + z\ln\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = -\frac{1}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z \times \left(1 + z\ln\frac{x}{y}\right)\ \left(\frac{x}{y} > 0\right)$. **3227.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{yu}{xz},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u\ln x}{z},\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{yu}{z^2}\ln x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2z^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u\ln^2 x}{z^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{yu\ln x}{z^4}(2z + y\ln x),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{(z + y\ln x)u}{xz^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = -\frac{yu(z + y\ln x)}{xz^3},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = -\frac{u\ln x(z + y\ln x)}{z^3}\ (xz \neq 0)$. **3228.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^z}{x}u,\ \frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1}u\ln x,\ \frac{\partial u}{\partial z} = y^z u\ln x\ln y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^z(y^z-1)}{x^2}u,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ zy^{z-2}u(z - 1 + zy^z\ln x)\ln x.\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = y^z u(1 + y^z\ln x) \times \ln x\ln^2 y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{zy^{z-1}u}{x}(1 + y^z\ln x),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = \frac{y^z u\ln y}{x}(1 + y^z\ln x)$,

$\frac{u}{\ldots} = y^{z-1}u\ln x[1 + z\ln y\ (1 + y^z\ln x)]\ (x>0, y>0)$. **3235.** $du = x^{m-1}y^{n-1}(my\,dx + nx\,dy),\quad d^2u = x^{m-2}y^{n-2}[m(m-1)y^2dx^2 + 2mnxy\,dx\,dy + n(n-1)x^2dy^2]$. **3236.** $du = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2},\ d^2u = -\frac{2}{y^3}dy(y\,dx - x\,dy)$. **3237.** $du = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ d^2u = \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **3238.** $du = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2},\ d^2u = \frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2) - 4xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2)^2}$. **3239.** $du = e^{xy}(y\,dx + x\,dy);\quad d^2u = e^{xy}[y^2dx^2 + 2(1+xy)\,dx\,dy + x^2dy^2]$. **3240.** $du = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz,\ d^2u = 2(dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx)$. **3241.** $du = \frac{(x^2+y^2)\,dz - 2z(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^2},\ d^2u = \frac{2z[(3x^2-y^2)\,dx^2 + 8xy\,dx\,dy + (3y^2-x^2)\,dy^2] - 4(x^2+y^2)(xdx + ydy)\,dz}{(x^2+y^2)^3}$. **3242.** $dx - dy;\ -2(dx - dy)(dy + dz)$. **3244.** a) $1 + mx + ny$; b) xy; c) $x + y$. **3245.** a) 108,969; b) 1,055; c) 2,95; d) 0,503; e) 0,97. **3246.** Diagonala se micşorează aproximativ cu 3 mm; aria se micşorează aproximativ cu 140 cm^2. **3247.** Trebuie micşorat cu 1,7 mm. **3249.** $\Delta \approx 10{,}2$ m^3; $\delta \approx 13\%$. **3250.** $\Delta \approx 7{,}6$ m. **3251.** $f'_x(x, y)$ şi $f'_y(x, y)$ nu sînt mărginite în vecinătatea punctului (0, 0). **3256.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24,\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y} = 0.\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} = -16$. **3257.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 0$. **3258.** $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3\,\partial y^3} = -6(\cos x + \cos y)$. **3259.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 0$. **3260.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$. **3261.** $\frac{\partial^4 u}{\partial x\,\partial y\,\partial \xi\,\partial \eta} = -\frac{6}{r^4} + \frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}$, unde $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. **3262.** $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\,\partial y^q} = p!q!$. **3263.** $\frac{(-1)^{m}(m+n-1)!\,(mx+ny)}{(x-y)^{m+n+1}}$. **3264.** $e^{x+y}[x^2 + y^2 + 2(mx + ny) + m(m-1) + n(n-1)]$. **3265.** $(x+p)(y+q)(z+r)u$. **3266.** $\sin\frac{n\pi}{2}$. **3267.** $(t) = f'(t) + 3tf''(t) + t^2f'''(t)$. **3268.** $d^4u = 24(dx^4 - 2dx^3dy - 2dxdy^2 + dy^4);\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24,\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^3\partial y} = -12,\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^4 u}{\partial x\partial y^3} = -12,\ \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24$. **3269.** $d^3u = 6(dx^3 - 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3)$. **3270.** $d^3u = -8(xdx + ydy)^3\cos(x^2+y^2) - 12(xdx + ydy)(dx^2 + dy^2)\sin(x^2+y^2)$. **3271.** $\ldots\frac{(ax + dy)^{10}}{(\ldots + y)^{10}}$. **3272.** $d^6u = -(dx^6 - 15\,dx^4dy^2 + 15\,dx^2dy^4 - \ldots y(3dx^4 - 10\,dx^2dy^2 + 3dy^4)\sin x\operatorname{sh} y$. **3273.** $-y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$. **3274.** $d^4u = 2\left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}\right)$. **3275.** $d^nu =$

$= \frac{5\pi}{4}$; c) $\alpha =$

$= e^{ax+by}(adx+bdy)^n$. **3276.** $d^n u = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^{(n-k)}(x)\, Y^{(k)}(y)\, dx^{n-k} dy^k$. **3277.** $d^n u = f^{(n)}(x+y+z)(dx+dy+dz)^n$. **3278.** $d^n u = e^{ax+by+cz} \times (adx+bdy+cdz)^n$. **3280.** a) $Au=-u$, $A^2u=u$; b) $Au=1$, $A^2u=0$. **3281.** a) $\Delta u=0$; b) $\Delta u=0$. **3282.** a) $\Delta_1 u = 9[(x^2-yz)^2+(y^2-xz)^2+(z^2-xy)^2]$, $\Delta_2 u = 6(x+y+z)$; b) $\Delta_1 u = \frac{1}{r^4}$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\Delta_2 u = 0$. **3283.** $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2 f''(x^2+y^2+z^2)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 4xyf''(x^2+y^2+z^2)$. **3284.** $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'\left(x,\frac{x}{y}\right) + \frac1y f_2'\left(x,\frac xy\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_2'\left(x,\frac xy\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}''\left(x,\frac xy\right) + \frac{2}{y} f_{12}''\left(x,\frac xy\right) + \frac{1}{y^2} f_{22}''\left(x,\frac xy\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{x}{y^2} f_{12}''\left(x,\frac xy\right) - \frac{x}{y^3} f_{22}''\left(x,\frac xy\right) - \frac{1}{y^2} f_2'\left(x,\frac xy\right)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^4} f_{22}''\left(x,\frac xy\right) + \frac{2x}{y^3} f_2'\left(x,\frac xy\right)$. **3285.** $\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'+yf_2'+yzf_3'$; $\frac{\partial u}{\partial y} = xf_2'+xzf_3'$; $\frac{\partial u}{\partial z} = xyf_3'$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{11}''+y^2f_{22}''+y^2z^2f_{33}''+2yf_{12}''+2zf_{13}''+2y^2zf_{23}''$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2f_{22}''+2x^2zf_{23}''+x^2z^2f_{33}''$; $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2y^2f_{33}''$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = xyf_{22}''+xyz^2f_{33}''+xf_{12}''+xzf_{13}''+2xyzf_{23}''+f_2'+zf_3'$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = xyf_{13}''+xy^2f_{23}''+xy^2zf_{33}''+yf_3'$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = x^2yf_{23}''+x^2yzf_{33}''+xf_3'$. **3286.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = f_{11}''+(x+y)f_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$. **3287.** $\Delta u = 3f_{11}''+4(x+y+z)f_{12}''+4(x^2+y^2+z^2)f_{22}''+6f_2'$. **3288.** $du=f'(t)(dx+dy)$; $d^2u = f''(t)(dx+dy)^2$. **3289.** $du=f'(t)\frac{xdy-ydx}{x^2}$; $d^2u=f''(t)\frac{(xdy-ydx)^2}{x^4} - 2f'(t)\frac{dx(xdy-ydx)}{x^3}$. **3290.** $du=f'\cdot\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $d^2u = f''\times\frac{(xdx+ydy)^2}{x^2+y^2}+f'\cdot\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{\frac32}}$. **3291.** $du=f'(t)\,dt$, $d^2u=f''(t)\,dt^2+f'(t)\,d^2t$, unde $dt=yzdx+zxdy+xydz$ şi $d^2t=2(zdxdy+ydxdz+xdydz)$. **3292.** $du=2f'\cdot(xdx+ydy+zdz)$; $d^2u=4f''\times(xdx+ydy+zdz)^2+2f'\cdot(dx^2+dy^2+dz^2)$. **3293.** $du=af_1'dx+bf_2'dy$; $d^2u=a^2f_{11}''dx^2+2abf_{12}''dxdy+b^2f_{22}''dy^2$. **3294.** $du=f_1'\cdot(dx+dy)+f_2'\cdot(dx-dy)$; $d^2u=f_{11}''\cdot(dx+dy)^2+2f_{12}''\cdot(dx^2-dy^2)+f_{22}''\times(dx-dy)^2$. **3295.** $du=f_1'\cdot(ydx+xdy)+f_2'\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}$; $d^2u = f_{11}''\times$

$\times(ydx+xdy)^2+2f_{12}''\cdot\frac{y^2dx^2-x^2dy^2}{y^2}+f_{22}''\cdot\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+2f_1'\cdot dxdy - 2f_2'\cdot\frac{(ydx-xdy)\,dy}{y^3}$. **3296.** $du=f_1'\cdot(dx+dy)+f_2'\cdot dz$; $d^2u=f_{11}''\times(dx+dy)^2+2f_{12}''\cdot(dx+dy)dz+f_{22}''\cdot dz^2$. **3297.** $du=f_1'\cdot(dx+dy+dz)+2f_2'\cdot(xdx+ydy+zdz)$; $d^2u=f_{11}''\cdot(dx+dy+dz)^2+4f_{12}''\cdot(dx+dy+dz)(xdx+ydy+zdz)+4f_{22}''(xdx+ydy+zdz)^2+2f_2'\cdot(dx^2+dy^2+dz^2)$. **3298.** $du=f_1'\cdot\frac{ydx-xdy}{y^2}+f_2'\cdot\frac{zdy-ydz}{z^2}$; $d^2u=f_{11}''\times\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}+2f_{12}''\cdot\frac{(ydx-xdy)(zdy-ydz)}{y^2z^2}+f_{22}''\cdot\frac{(zdy-ydz)^2}{z^4} - 2f_1'\cdot\frac{(ydx-xdy)\,dy}{y^3} - 2f_2'\cdot\frac{(zdy-ydz)\,dz}{z^3}$. **3299.** $du=(f_1'+2tf_2'+3t^2f_3')\,dt$; $d^2u=(f_{11}''+4tf_{12}''+4t^2f_{22}''+6t^2f_{13}''+12t^3f_{23}''+9t^4f_{33}''+2f_2'+6tf_3')\,dt^2$. **3300.** $du=af_1'dx+bf_2'dy+cf_3'dz$; $d^2u=a^2f_{11}''dx^2+b^2f_{22}''dy^2+c^2f_{33}''dz^2+2abf_{12}''dxdy+2acf_{13}''dxdz+2bcf_{23}''dydz$. **3301.** $du=2f_1'\cdot(xdx+ydy)+2f_2'\cdot(xdx-ydy)+2f_3'\cdot(ydx+xdy)$; $d^2u=4f_{11}''\cdot(xdx+ydy)^2+4f_{22}''\cdot(xdx-ydy)^2+4f_{33}''\cdot(ydx+xdy)^2+8f_{12}''\times(x^2dx^2-y^2dy^2)+8f_{13}''\cdot(xdx+ydy)(ydx+xdy)+8f_{23}''\cdot(xdx-ydy)\times(ydx+xdy)+2f_1'\cdot(dx^2+dy^2)+2f_2'\cdot(dx^2-dy^2)+4f_3'\cdot dxdy$. **3302.** $d^nu=f^{(n)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^n$. **3303.** $d^nu=\left(adx\frac{\partial}{\partial\xi}+bdy\frac{\partial}{\partial\eta}+cdz\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)^n f(\xi,\eta,\zeta)$, unde $\xi=ax$, $\eta=by$, $\zeta=cz$. **3304.** $d^nu=\left[dx\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi}+a_2\frac{\partial}{\partial\eta}+a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+dy\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial}{\partial\eta}+b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)+dz\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial}{\partial\eta}+c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]^n f(\xi,\eta,\zeta)$. **3305.** $F(r)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$. **3316.** 1. **3319.** xyz. **3331.** $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x$. **3332.** $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$. **3333.** $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$. **3334.** $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$. **3335.** $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$. **3336.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$. **3337.** $z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$. **3338.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. **3339.** $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$. **3340.** $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$. **3341.** $1-\sqrt3$. **3342.** $\frac{\partial z}{\partial l}=\cos\alpha+\sin\alpha$; a) $\alpha=\frac\pi4$; b) $\alpha=\frac{5\pi}{4}$; c) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ şi $\alpha=\frac{7\pi}{4}$. **3343.** $\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. **3344.** $\frac{2}{ab}\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

3345. $\frac{\partial u}{\partial l}=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$; $|\operatorname{grad} u|=\sqrt{3}$. 3346. $|\operatorname{grad} u|=\frac{1}{r_0^2}$; $\cos(\widehat{\operatorname{grad} u, x})=-\frac{x_0}{r_0}$, $\cos(\widehat{\operatorname{grad} u, y})=-\frac{y_0}{r_0}$, $\cos(\widehat{\operatorname{grad} u, z})=-\frac{z_0}{r_0}$, unde $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. 3347. $\frac{\pi}{2}$. 3348. $1000\pi\sqrt{3}\approx 5441$. 3350. $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\times\cos\alpha\cos\beta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\alpha\cos\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma$. 3352. $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}$. 3353. $u''_{xx}(x, 2x)=u''_{yy}(x, 2x)=-\frac{4}{3}x$, $u''_{xy}(x, 2x)=\frac{5}{3}x$. 3354. $z=x\varphi(y)+\psi(y)$. 3355. $z=\varphi(x)+\psi(y)$. 3356. $z=\varphi_0(x)+y\varphi_1(x)+\ldots+y^{n-1}\varphi_{n-1}(x)$. 3357. $u=\varphi(x, y)+\psi(x, z)+\chi(y, z)$. 3358. $u=1+x^2y+y^2-2x^4$. 3359. $z=1+xy+y^2$. 3360. $z=x+y^2+\frac{1}{2}xy(x+y)$. 3362. Mulţimea zerourilor funcţiei $f(x)$ nu trebuie să fie nicăieri densă în intervalul (a, b), cu alte cuvinte zerourile funcţiei $f(x)$ nu pot umple în întregime nici un interval $(\alpha, \beta)\subset(a, b)$. 3363. Mulţimea zerourilor funcţiei $f(x)$ nu trebuie să fie nicăieri densă în intervalul (a, b) iar fiecare zero al funcţiei $f(x)$ trebuie să fie în acelaşi timp un zero al funcţiei $g(x)$. 3364. 1) O mulţime infinită; 2) două; 3) a) una; b) două. 3365. 1) O mulţime infinită; 2) patru: $y=x$, $y=-x$, $y=|x|$ şi $y=-|x|$; 3) mulţime infinită; 4) a) două; b) patru: 5) una. 3366. 1) Nicăieri; 2) $0<|x|<1$, $|x|=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; 3) $x=0$, $|x|=1$; 4) $1<|x|<\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$; ramurile uniforme sînt: $y=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}$ $\left(|x|\leq\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$; $y=\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}$ $\left(1\leq|x|\leq\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)$, unde $\varepsilon=-1, 1$. 3367. Puncte de ramificare sînt: $(-1, 0)$, $(0; 0)$, $(1, 0)$; $y=\varepsilon(x)\sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1}-(2x^2+1)}{2}}$; $(|x|\leq 1)$, unde $\varepsilon(x)=-1, 1$; $\operatorname{sgn} x$ şi $-\operatorname{sgn} x$. 3368. Mulţimea valorilor funcţiei $\varphi(y)$ trebuie să aibă puncte comune cu mulţimea valorilor funcţiei $f(x)$. 3371. $y'=-\frac{x+y}{x-y}$; $y''=\frac{2a^2}{(x-y)^3}$. 3372. $y'=\frac{x+y}{x-y}$; $y''=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. 3373. $y'=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$; $y''=\frac{-\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$. 3374. $y'=\frac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}$; $y''=$

$-\frac{\ldots}{x^4(1-\ln y)^3}$. 3375. $y'=\frac{\ldots}{x}$, $y''=0$. 3378. $y_1'(0)=-1$; $y_2'(0)=1$. 3379. $y_1'(0)=0$; $y_2'(0)=-\sqrt{3}$, $y_3'(0)=\sqrt{3}$. 3380. $y'=-\frac{2x+y}{x+2y}$; $y''=-\frac{18}{(x+2y)^3}$; $y'''=-\frac{162x}{(x+2y)^5}$. 3381. $y'=0$; $y''=-\frac{2}{3}$; $y'''=-\frac{2}{3}$. 3383. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x^2+z^2}{z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{xy}{z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{y^2+z^2}{z^3}$. 3384. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{z^2-xy}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$. 3385. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+y+z-1}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}$. 3386. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^2-y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^2-y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}$. 3387. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=-1$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. 3388. a) -2); b) -1. 3389. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{1}{5}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{394}{125}$. 3390. $dz=-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right)$; $d^2z=-\frac{c^4}{z^3}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dx^2}{a^2}+\frac{2xy}{a^2b^2}\,dx\,dy+\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{dy^2}{b^2}\right]$. 3391. $dz=-\frac{(1-yz)\,dx+(1-xz)\,dy}{1-xy}$; $d^2z=-\frac{2\{y(1-yz)\,dx^2+[x+y-z(1+xy)]\,dx\,dy+x(1-xz)\,dy^2\}}{(1-xy)^2}$. 3392. $dz=\frac{z(y\,dx+z\,dy)}{y(x+z)}$; $d^2z=-\frac{z^2(y\,dx-x\,dy)^2}{y^2(x+z)^3}$. 3393. $dz=dx-\frac{(x-z)\,d\ldots}{(x-z)^2+y\ldots}$ $d^2z=\frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2+y^2]}{[(x-z)^2+y(y+1)]^3}dy^2$. 3394. $du=-\frac{u^2(dx+dy)-\ldots}{2(x+y)-\ldots}$ 3395. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{4(x-z)(y-z)}{(F_1'+2zF_2')^3}[F_2'^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_1'^2\ldots$ $-\frac{2(F_1'+2xF_2')(F_1'+2yF_2')F_2'}{(F_1'+2zF_2')^3}$. 3396. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'-F_3'}{F_2'-F_3'}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'-F_1'}{F_2'-F_3'}$. 339… $=-\left(1+\frac{F_1'+F_2'}{F_2'}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\left(1+\frac{F_2'}{F_3'}\right)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-F_3'^{-3}[F_3'^2(F_{11}''+2F_{12}''+$ $-2(F_1'+F_2')F_3'(F_{13}''+F_{23}'')+(F_1'+F_2')^2F_{33}'']$. 3398. $\frac{\partial^2 z}{\ldots}$

$\frac{{}^2F''_{22}}{(F'_1+F'_2)^3}(dx-dy)^2$; b) $d^2z=$ $\frac{{}'_1-2F'_1F'_2F''_{12}+F'^2_1F''_{22}}{(xF'_1+yF'_2)^3}(y\,dx-x\,dy)^2$. **3401.** $\frac{dx}{dz}=\frac{y-z}{x-y}$; $\frac{dy}{dz}=\frac{z-x}{x-y}$. $\frac{dx}{dz}=0$, $\frac{dy}{dz}=-1$, $\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{d^2y}{dz^2}=-\frac{1}{4}$. **3403.** $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$; $\frac{\ldots-xv}{\ldots^2+y^2}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{xu+yv}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2>0)$. **3404.** $du=$ $\frac{\ldots v+x\cos v)\,dx-(\sin u-x\cos v)\,dy}{x\cos v+y\cos u}$; $dv=\frac{-(\sin v-y\cos u)\,dx}{x\cos v+y\cos u}+$ $\frac{\ldots u+y\cos u)\,dy}{\ldots\cos v+y\cos u}$; $d^2u=-d^2v=\frac{(2\,dx\cos v-x\,dv\sin v)\,dv}{x\cos v+y\cos u}-$ $\frac{\ldots dy\cos u-y\,du\sin u)\,du}{x\cos v+y\cos u}$. **3405.** $du=\frac{1}{2}(dx+dy)$; $dv=\frac{\pi}{4}\,dy-$ $\ldots x-dy)$; $d^2u=dx^2$; $d^2v=\frac{1}{2}(dx-dy)^2$. **3406.** $\frac{dy}{dx}=2\left(t+\frac{1}{t}\right)$; $\ldots\left(t^2+\frac{1}{t^2}+1\right)$; $\frac{d^2y}{dx^2}=2$; $\frac{d^2z}{dx^2}=6\left(t+\frac{1}{t}\right)$. **3407.** $y\geqq\frac{x^2}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}=-3uv$; $\ldots(u+v)\,(u\neq v)$. **3408.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}$. **3409.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=$ $\ldots\frac{v}{\ldots}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}$. **3410.** $dz=0$; $d^2z=$ $\ldots(dx^2-dy^2)$. **3411.** $\frac{dz}{dx}=\frac{2(x^2-y^2)}{x-2y}$; $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{4x-2y}{x-2y}+\frac{6x}{(x-2y)^3}$. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y+z}+\frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{x-z}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x+z}{(y+z)^2}+\frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2}e^{y-z}$. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$, unde $I=$ $\ldots\frac{\psi}{v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$. **3414.** $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\ldots\frac{{}^2\psi}{u^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2\right\}$; $\ldots\frac{1}{I^3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\ldots\frac{\psi}{u}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\Big\}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{I^3}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-\ldots\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right\}$, unde $I=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\ldots\frac{\psi}{u}$. **3415.** a) $\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{v}{u}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}\right)$;

$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$; b) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1}$; $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-(e^u-\cos v)}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$; $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{e^u+\sin v}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}$. **3416.** $\frac{du}{dx}=\frac{I}{I_1}$; $\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{I_1^3}\left\{\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f+\frac{\partial(h,f)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 g+\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\left(I_1\frac{\partial}{\partial x}+I_2\frac{\partial}{\partial y}+I_3\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 h\right\}$, unde $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}$, $I_2=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,x)}$, $I_3=\frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}$ şi $I=\frac{D(f,g,h)}{D(x,y,z)}$. **3417.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{I_2}{I_1}\frac{\partial g}{\partial y}$, unde $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ şi $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}$. **3418.** $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{I_1}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_2}{I}$, unde $I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}$, $I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}$ şi $I=\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}$. **3419.** $dz=-\frac{I_1dx+I_2dy}{I_3}$, unde $I_1=\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,t)}$, $I_2=\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,t)}$, $I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,t)}$. **3431.** $x'''+xx'^5=0$. **3432.** $x^{\mathrm{IV}}=0$. **3433.** $\frac{d^2x}{dt^2}-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0$. **3434.** $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$. **3435.** $\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-6y=0$. **3436.** $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$. **3437.** $\frac{d^2y}{dt^2}+m^2y=0$. **3438.** $u''+\left[\ldots(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0$. **3439.** $\frac{d^2u}{dt^2}+(u+3)\frac{du}{dt}+2u=0$. **3440.** $\frac{d^2u}{dt^2}\ldots=0$. **3441.** $\frac{d^2u}{dt^2}=0$. **3442.** $\frac{d^2u}{dt^2}+8u\left(\frac{du}{dt}\right)^3=0$. **3443.** $t^5\frac{d^3u}{dt^3}-(3t^4-1)\times\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=0$. **3444.** $u''-u'=\frac{A}{(a-b)^2}u$. **3446.** $\Phi(1,\ u,\ u'+u^2)=0$. **3447.** $F(xu'+u^2-u,\ u,\ 1)=0$. **3450.** $\frac{dr}{d\varphi}=r$. **3451.** $r'^2=\frac{1-\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}r^2$. **3452.** $r(r^2+2r'^2-rr'')=r'^3$. **3453.** $\frac{r'}{r}$. **3454.** $K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$. **3455.** $\frac{dr}{dt}=kr^3$; $\frac{d\varphi}{dt}=-1$. **3456.** $w=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right)$. **3457.** $Y'=x$; $Y''=\frac{1}{y''}$; $Y'''=-\frac{y'''}{y''^3}$. **3458.** $z=\varphi(x+y)$ unde φ este o funcţie arbitrară. **3459.** $z=\varphi(x^2+y^2)$. **3460.** $z=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz)$. **3461.** $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **3462.** $\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=e^u\,\mathrm{sh}\,v$. **3463.** $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial v}$. **3464.** $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{z+1}$. **3465.** $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{z}{v}\cdot\frac{z^2+u}{z^2-u}$. **3466.** $(z-v)\ldots$

$+(z-u)\dfrac{\partial z}{\partial v}=u+v-z$. **3467.** $\dfrac{e^{x+y}-z^2}{1-e^{-x}\dfrac{\partial z}{\partial \xi}-e^{-y}\dfrac{\partial z}{\partial \eta}}$. **3468.** $\dfrac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2}{u^2+v^2}$. **3469.** $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}=0$. **3470.** $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{x-z}{y}$. **3471.** $\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{u}{v}$. **3472.** $A=\dfrac{x^2-2xu+u^2\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^4\left(u\dfrac{\partial x}{\partial u}+v\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2}$. **3473.** $\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta}+\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}+3u+(e^{\xi}+e^{\eta}+e^{\zeta})=0$. **3474.** $\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$. **3475.** $\dfrac{\partial w}{\partial u}=0$. **3476.** $\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$. **3477.** $u^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial v}$. **3478.** $\dfrac{e^{2u}\left(1-\dfrac{\partial w}{\partial v}\cos^2 v\right)}{\dfrac{\partial w}{\partial v}}$. **3479.** $A=\dfrac{\partial w}{\partial u}:\dfrac{\partial w}{\partial v}$. **3480.** $\dfrac{\partial w}{\partial \zeta}=\dfrac{\xi\eta}{\zeta}$. **3481.** $w=\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}$. **3482.** $w=r\dfrac{\partial u}{\partial r}$. **3483.** $w=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$. **3484.** $w=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. **3485.** $w=r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. **3486.** $w=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. **3487.** $I=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}-\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)$. **3488.** $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$, unde φ şi ψ sînt funcţii arbitrare. **3489.** $3\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$. **3490.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$. **3491.** $a\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)+2b\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+b\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. **3492.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$. **3493.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2e^{2u}z=0$. **3494.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$. **3495.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial z}{\partial v}$. **3496.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{2}{u(4-uv)}\dfrac{\partial z}{\partial v}$. **3497.** $(u^2-v^2)^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=8v\dfrac{\partial z}{\partial u}$. **3498.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\dfrac{2uv^2}{u^2+v^2}\dfrac{\partial z}{\partial u}$. **3499.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{1}{u^2-v^2}\left(v\dfrac{\partial z}{\partial u}-u\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. **3500.** $\left(1-\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=1$. **3501.** $u=\varphi(x+\lambda_1 y)+\psi(x+\lambda_2 y)$, unde λ_1 şi λ_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $A+2B\lambda+C\lambda^2=0$. **3503.** a) $\Delta u=\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{du}{dr}$; b) $\Delta(\Delta u)=\dfrac{d^4u}{dr^4}+\dfrac{2}{r}\dfrac{d^3u}{dr^3}-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{1}{r^3}\dfrac{du}{dr}$. **3504.** $u\dfrac{d^2w}{du^2}+\dfrac{dw}{du}+cw=0$. **3505.** $A=X\dfrac{d^2u}{\partial X^2}-Y\dfrac{\partial^2 u}{\partial X\,\partial Y}+\dfrac{\partial u}{\partial X}$. **3508.** $\xi\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\eta\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\zeta\dfrac{\partial}{\partial \zeta}\left(\zeta\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}\right)=2\left(\xi\eta\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}+\xi\zeta\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \zeta}+\eta\zeta\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta\,\partial \zeta}\right)$.

3509. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y_1^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y_2^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y_3^2}=0$. **3510.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=0$. **3511.** $\Delta_1 u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$; $\Delta_2 u=\dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right]$. **3512.** $w\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2$. **3513.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$. **3514.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. **3515.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\dfrac{1}{2}$. **3516.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=2w$. **3517.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\dfrac{v}{u}-1\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. **3518.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0$. **3519.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{w}{4\sin^2(u-v)}$. **3520.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$. **3523.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=0$. **3524.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2}=\dfrac{\partial w}{\partial \xi}+\dfrac{\partial w}{\partial \eta}+\dfrac{\partial w}{\partial \zeta}+(e^{w}-1)\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial \zeta}\right)^2\right]$. **3526.** $x=y\varphi(z)+\psi(z)$. **3527.** $A(X, Y)\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2}-2\times B(X, Y)\dfrac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}+C(X, Y)\dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}=0$. **3528.** $\dfrac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\dfrac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\dfrac{z-z_0}{\cos t_0}$; $z-z_0=(x-x_0)\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,t_0+(y-y_0)\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,t_0$, unde $x_0=a\cos\alpha\cos t_0$, $y_0=a\sin\alpha\cos t_0$, $z_0=a\sin t_0$. **3529.** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$, $y=\dfrac{b}{2}$; $ax-cz=\dfrac{1}{2}(a^2-c^2)$. **3530.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$; $x+y+2z=4$. **3531.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$; $3x+3y-z=3$. **3532.** $x+z=2$; $y+2=0$; $x-z=0$. **3533.** $M_1(-1, 1, -1)$; $M_2\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}\right)$. **3537.** $\mathrm{tg}\,\varphi=f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha$. **3538.** $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{8}{81}$. **3539.** $2x+4y-z-5=0$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$. **3540.** $3x+4y+12z=169$; $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{12}$. **3541.** $z=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(x-y)$; $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\dfrac{\pi}{4}}{2}$. **3542.** $ax_0x+by_0y+cz_0z=1$; $\dfrac{x-x_0}{ax_0}=\dfrac{y-y_0}{by_0}=\dfrac{z-z_0}{cz_0}$. **3543.** $x+y-2z=0$; $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$. **3544.** $x+y-4z=0$; $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$. **3545.** $\dfrac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\dfrac{y}{b}\cos\psi_0\times\sin\varphi_0+\dfrac{z}{c}\sin\psi_0=1$; $\dfrac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\dfrac{y\sec\psi_0\,\mathrm{cosec}\,\varphi_0-b}{ac}=\dfrac{z\,\mathrm{cosec}\,\psi_0-c}{ab}$. **3546.** $x\cos\varphi_0+y\sin\varphi_0-z\,\mathrm{tg}\,\alpha=0$; $\dfrac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0}=$

$=\frac{y-r_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0}=\frac{z-r_0 \operatorname{ctg} \alpha}{-\operatorname{tg} \alpha}$. **3547.** $ax \sin v_0 - ay \cos v_0 + u_0 z = a u_0 v_0$; $\frac{x-u_0 \cos v_0}{a \sin v_0}=\frac{y-u_0 \sin v_0}{-a \cos v_0}=\frac{z-a v_0}{u_0}$. **3548.** $\frac{3x}{u_0}-\frac{3y}{u_0^2}+\frac{z}{u_0^3}=2$. **3549.** $A(0,\ \pm 2\sqrt{2},\ \mp 2\sqrt{2})$; $B(\pm 2,\ \mp 4,\ \pm 2)$; $C(\pm 4,\ \mp 2,\ 0)$. **3550.** $x=\pm\frac{a^2}{d}$, $y=\pm\frac{b^2}{d}$, $z=\pm\frac{c^2}{d}$, unde $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **3551.** $x+4y+6z=\pm 21$. **3556.** $x^2+y^2-xy=0,\ z=0$; $3y^2+4z^2=4,\ x=0$; $3x^2+4z^2=4,\ y=0$. **3557.** $\delta<0{,}011$. **3559.** $\cos\varphi=\frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$. **3563.** $\frac{\partial u}{\partial n}=x_0+y_0+z_0$; a) $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $x_0=y_0=z_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; c) pe cercul $x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$. **3564.** $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$.

3566. $x^2+y^2=p^2$. **3567.** $y=\pm x$. **3568.** $y^2=4ax$. **3569.** Nu are înfăşurătoare. **3570.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$. **3571.** $|xy|=\frac{S}{2\pi}$. **3572.** $y=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}$. **3574.** a) $y=0$ este înfăşurătoare; b) $y=0$ este înfăşurătoare (locul geometric al punctelor de inflexiune); c) $y=0$ este locul geometric al punctelor singulare (punctelor de întoarcere); d) $x=0$ este locul geometric al punctelor duble (puncte de întoarcere); $x=a$ este înfăşurătoare. **3575.** Torul $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2$. **3576.** $x^2\sin^2\alpha+y^2\sin^2\beta+z^2\sin^2\gamma-2xy\cos\alpha\cos\beta-2xz\cos\alpha\cos\gamma-2yz\cos\beta\cos\gamma=1$. **3577.** $|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}$. **3578.** $|z\pm\sqrt{x^2+y^2}|=\rho\sqrt{2}$. **3579.** $\begin{vmatrix} x & y \\ x_0 & y_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y & z \\ y_0 & z_0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ z_0 & x_0 \end{vmatrix}^2 \leq R^2(x^2+y^2+z^2)$. **3580.** $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(z-z_0)^2$. **3581.** $f(x,\ y)=5+2\times(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$. **3582.** $f(x,\ y,\ z)=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+(x-1)^3+(y-1)^3+(z-1)^3-3(x-1)(y-1)(z-1)$. **3583.** $\Delta f(1,-1)=h-3k+(-h^2-2hk+k^2)+(h^2k+hk^2)$. **3584.** $f(x+h,\ y+k,\ z+l)=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+E)+k(Dx+By+F)+l(Ex+Fy+Cz)]+f(h,\ k,\ l)$. **3585.** $x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_2(1+\theta(x-1),\ 1+\theta(y-1))$ $(0<\theta<1)$, unde $R_2(x,\ y)=\frac{1}{6}x^y\left[\left(\frac{y}{x}\,dx+\ln x\cdot dy\right)^3+3\left(\frac{y}{x}\,dx+\ln x\cdot dy\right)\left(-\frac{y}{x^2}dx^2+\frac{2}{x}\,dx\,dy\right)+\left(\frac{2y}{x^3}dx^3-\frac{3}{x^2}dx^2dy\right)\right]$ şi $dx=x-1$, $dy=y-1$.

3586. $1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2$. **3587.** a) $1-\frac{1}{2}(x^2-y^2)$; b) $\frac{\pi}{4}+x-xy$. **3588** $(xy+xz+yz)$. **3589.** $F(x,\ y)=\frac{h^2}{4}(f''_{xx}+f''_{yy})+\frac{h^4}{48}(f^{IV}_{xxxx}+f^{IV}_{yyyy})+\ldots$ **3590.** $F(\rho)=f(x,\ y)+\frac{\rho^2}{4}[f''_{xx}(x,\ y)+f''_{yy}(x,\ y)]$. **3591.** $\Delta_{xy}f(x,\ y)=hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!\,(n-m)!}\,\frac{\partial^n f(x,\ y)}{\partial x^m\,\partial y^{n-m}}\right]$. **3592.** $F(\rho)=f(x,\ y)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{2k}}{2^{2k-1}}\sum_{s=0}^{k}\frac{(2s+1)(2k-2s+1)}{s!\,(2k-2s)!}f^{(2k)}_{x^{2s}\,y^{2k-2s}}(x,y)$. **3593.** $1+(mx+ny)+\left[\frac{m(m-1)}{2!}x^2+mnxy+\frac{n(n-1)}{2!}y^2\right]+\ldots$ $(|x|<1,\ |y|<1)$. **3594.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n}\right\}$ $(|x+y|<1)$. **3595.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n+1}}{m!\,(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty)$. **3596.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times\frac{x^m y^{2n}}{m!\,(2n)!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty)$. **3597.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\times\frac{x^{2m+1}y^{2n+1}}{(2m+1)!\,(2n+1)!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty)$. **3598.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\times\frac{x^{2m}y^{2n}}{(2m)!\,(2n)!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty)$. **3599.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x^2+y^2<+\infty)$. **3600.** $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{x^m y^n}{mn}$ $(|x|<1,\ |y|<1)$. **3601.** $f(x,\ y)=1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}\right)y+\frac{1}{10}x^2y^2$. **3602.** $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^m(y+1)^n}{m!\,n!}$ $(|x|<+\infty,\ |y|<+\infty)$. **3603.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[1+(x-1)](y-1)^n$ $(-\infty<x<+\infty,\ 0<y<2)$. **3604.** $z=1+[2(x-1)-(y-1)]-[8(x-1)^2-10\times(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+\ldots$ **3605.** $(0,\ 0)$ este un punct izolat, dacă $a<0$; un punct de întoarcere, dacă $a=0$; un punct dublu dacă $a>0$. **3606.** $(0,\ 0)$ este un punct dublu. **3607.** $(0,\ 0)$ este un punct

izolat. **3608.** (0, 0) este un punct izolat. **3609.** (0, 0) este un punct dublu. **3610.** (0, 0) este un punct de întoarcere (de speţa a doua). **3611.** (0, 0) este un punct dublu. **3612.** Dacă $a<b<c$, curba este formată dintr-un oval şi dintr-o ramură infinită; dacă $a=b<c$, $A(a, 0)$ este un punct izolat; dacă $a<b=c$, $B(b, 0)$ este un punct dublu; dacă $a=b=c$, $A(a, 0)$ este un punct de întoarcere. **3613.** (0, 0) este un punct dublu. **3614.** (0, 0) este un punct de întoarcere. **3615.** (0, 0) este un punct de oprire. **3616.** (0, 0) este un punct unghiular. **3617.** $x=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sînt puncte de discontinuitate de speţa întîi. **3618.** $x=0$ este un punct de discontinuitate de speţa a doua. **3619.** $x=0$ este un punct dublu. **3620.** $x=k\pi$ $(x=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sînt puncte de întoarcere. **3621.** $z_{min}=0$ pentru $x=0$ şi $y=1$. **3622.** Nu există extremumuri. **3623.** Avem un minim slab $z=0$ în punctele dreptei $x-y+1=0$. **3624.** $z_{min}=-1$ pentru $x=1$ şi $y=0$. **3625.** $z_{max}=108$ pentru $x=2$, $y=3$; avem un minim slab $z=0$ pentru $x=0$, $0<y<6$; un maxim slab $z=0$ pentru $x=0$, $-\infty<y<0$ şi $6<y<+\infty$. **3626.** $z_{min}=-1$ pentru $x=1$ şi $y=1$. **3627.** $z_{min}=-2$ pentru $x_1=-1$, $y_1=-1$ şi $x_2=1$, $y_2=1$; pentru $x=0$ şi $y=0$ n-avem extremum. **3628.** Minim $z=30$ pentru $x=5$ şi $y=2$. **3629.** $z_{min}=\frac{-ab}{3\sqrt{3}}$ pentru $\frac{x}{a}=-\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; $z_{max}=\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ pentru $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3630.** $z_{max}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ pentru $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$, dacă $c>0$; $z_{min}=-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ pentru $x=\frac{a}{c}$, $y=\frac{b}{c}$, dacă $c<0$; nu avem extremum dacă $c=0$, $a^2+b^2\neq 0$. **3631.** $z_{max}=1$ pentru $x=0$ şi $y=0$. **3632.** $z_{min}=0$ pentru $x=0$, $y=0$; şa $z=\frac{1}{2}e^{-2}$ pentru $x=-\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$. **3633.** Şa $z=e^3$ pentru $x=1$, $y=-2$. **3634.** Un maxim $z=e^{-13}\approx 2{,}26\cdot 10^{-6}$ pentru $x=1$, $y=3$; un minim $z=-26\cdot e^{-\frac{1}{52}}\approx -25{,}51$ pentru $x=-\frac{1}{26}$, $y=-\frac{3}{26}$. **3635.** Un minim $z=7-10\cdot\ln 2\approx 0{,}0685$ pentru $x=1$, $y=2$. **3636.** $z_{max}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ pentru $x=\frac{\pi}{3}$ şi $y=\frac{\pi}{6}$. **3637.** $z_{min}=\frac{-3\sqrt{3}}{8}$ pentru $x=y=\frac{2\pi}{3}$; $z_{max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ pentru $x=y=\frac{\pi}{3}$. **3638.** Şa $z=-1+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\pi\approx 1{,}70$ pentru $x=1$, $y=1$. **3639.** Un minim $z=-\frac{1}{2e}\approx -0{,}184$ pentru $x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\approx\pm 0{,}43$; un maxim $z=\frac{1}{2e}$ pentru $x=-y=\pm\frac{1}{2e}$; nu există extremumuri în punctele staţionare: $x=0$, $y=1$ şi $x=1$, $y=0$. **3640.** Punctele staţionare sînt $x=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m+n)\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{12}(-1)^{m+1}+(m-n)\frac{\pi}{2}$ $(m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Avem extremum $z=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2(-1)^n$, dacă m şi n sînt de paritate diferită (*maxim* pentru m impar şi n par, *minim* pentru m par şi n impar); nu există extremum dacă m şi n sînt de aceeaşi paritate. **3641.** $z_{min}=0$ pentru $x=0$ şi $y=0$; maxim slab $z=e^{-1}$ pentru $x^2+y^2=1$. **3642.** $u_{min}=-14$ pentru $x=-1$, $y=-2$, $z=3$. **3643.** Un minim $u=-6913$ pentru $x=24$, $y=-144$, $z=-1$. **3644.** Avem minim $u=4$ pentru $x=\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=1$. **3645.** $u_{max}=\frac{a^7}{7^7}$ pentru $x=y=z=\frac{a}{7}$; un extremum slab $z=0$ pentru $y=0$, $x\neq 0$, $z\neq 0$, $x+2y+3z\neq a$. **3646.** Avem un minim $u=\frac{15a}{4}\sqrt[15]{\frac{a}{16b}}$ pentru $x=\frac{1}{2}\sqrt[15]{16a^{14}b}$, $y=\frac{1}{4}\sqrt[5]{16a^4b}$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^8b^7}{4}}$. **3647.** Avem un maxim $u=4$ pentru $x=y=z=\frac{\pi}{2}$; un minim marginal $u=0$ pentru $x=y=z=0$ şi $x=y=z=\pi$. **3648.** $u_{max}=\left(\frac{2}{n^2+n+2}\right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$ pentru $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{2}{n^2+n+2}$. **3649.** Minim $u=(n+1)\,2^{\frac{1}{n+1}}$ pentru $x_1=2^{\frac{1}{n+1}}$, $x_2=x_1^2, \ldots, x_n=x_1^n$. **3650.** Numerele $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$ formează o progresie geometrică cu raţia $q=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$. **3651.** Avem un minim $z_1=-2$ şi un maxim $z_2=6$ pentru $x=1$, $y=-1$. **3652.** $z_{min}=-(4+2\sqrt{6})$ pentru $x=y=-(3+\sqrt{6})$; $z_{max}=2\sqrt{6}-4$ pentru $x=y=-(3-\sqrt{6})$. **3653.** Minim slab $z=-\frac{a}{2\sqrt{2}}$ pentru $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z<0$; maxim slab $z=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ pentru $x^2+y^2=\frac{3a^2}{8}$, $z>0$. **3654.** $z_{max}=\frac{1}{4}$ pentru $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. **3655.** $z_{min}=-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ pentru $x=-\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=-$

$=-\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $z_{max}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ pentru $x=\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$, unde $\varepsilon=\operatorname{sgn} ab\neq 0$. **3656.** $z_{max}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ pentru $x=\frac{ab^2}{a^2+b^2}$, $y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}$ **3657.** $u_{min}=\lambda_1$, $u_{max}=\lambda_2$, unde λ_1 și λ_2 sînt rădăcinile ecuației $(A-\lambda)(C-\lambda)-B^2=0$ și $\lambda_1<\lambda_2$. **3658.** Extremum $z=1+\frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}$ pentru $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ (maxim dacă k este par și minim dacă k este impar). **3659.** $u_{min}=-3$ pentru $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$; $u_{max}=3$ pentru $x=\frac{1}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=\frac{2}{3}$. **3660.** $u_{max}=\frac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$ pentru $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}=\frac{a}{m+n+p}$. **3661.** $u_{min}=c^2$ pentru $x=0$, $y=0$, $z=\pm c$; $u_{max}=a^2$ pentru $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$. **3662.** $u_{max}=\left(\frac{a}{6}\right)^6$ pentru $x=y=z=\frac{a}{6}$. **3663.** $u_{min}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$ pentru $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$ și $z=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ și $y=-\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ și $x=-\frac{2}{\sqrt{6}}$; $u_{max}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$ pentru $x=y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ și $z=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ și $y=\frac{2}{\sqrt{6}}$, $y=z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ și $x=\frac{2}{\sqrt{6}}$. **3664.** $u_{max}=\frac{1}{8}$ pentru $x=y=z=\frac{\pi}{6}$. **3665.** $u_{min}=\lambda_1$ și $u_{max}=\lambda_2$ unde λ_1 și λ_2 sînt rădăcinile ecuației $\lambda^2-\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)=0$ $(\lambda_1<\lambda_2)$. **3666.** $u_{min}=\frac{R^2(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}{A^2+B^2+C^2}$; $u_{max}=R^2$. **3667.** $u_{min}=\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ pentru $x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ $(i=1, 2, \dots, n)$. **3668.** $u_{min}=\frac{a^p}{n^{p-1}}$ pentru $x_i=\frac{a}{n}$ $(i=1, 2, \dots, n)$. **3669.** $u_{min}=\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^2$ pentru $x_i=\sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}}\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\alpha_j\beta_j}\right)^{-1}$ $(i=1, 2, \dots, n)$. **3670.** $u_{max}=\left(\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\dots\alpha_n^{\alpha_n}$ pentru $\frac{x_1}{\alpha_1}=\frac{x_2}{\alpha_2}=\dots=\frac{x_n}{\alpha_n}=\frac{a}{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}$. **3671.** Valorile extreme $u=\lambda$ se determină

din ecuația $|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}|=0$, unde $\delta_{ij}=0$ pentru $i\neq j$ și $\delta_{ii}=1$. **3675.** $\inf z=-5$; $\sup z=-2$. **3676.** $\inf z=-75$; $\sup z=125$. **3677.** $\inf z=0$; $\sup z=1$. **3678.** $\inf u=0$ $\sup u=300$. **3679.** $\inf u=-\frac{1}{2}$; $\sup u=1+\sqrt{2}$. **3680.** $\inf u=0$; $\sup u=e^{-1}\approx 0{,}37$. **3682.** Nu. **3683.** Minimul este egal cu $\frac{n}{\sqrt[n]{a}}$. **3684.** Termenii sînt egali. **3685.** Factorii sînt egali cu $x_i=\frac{\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\dots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{\frac{1}{\alpha_1}}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}}}}{(\alpha_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}}$ $(i=1, 2, \dots, n)$, unde α_i $(i=1, 2, \dots, n)$ sînt exponenții respectivi; valoarea cea mai mică a sumei este $\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(a\alpha_1^{\frac{1}{\alpha_1}}\alpha_2^{\frac{1}{\alpha_2}}\dots\alpha_n^{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\dots+\frac{1}{\alpha_n}}}$. **3686.** $x=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i x_i$, $y=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i y_i$, unde $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$. **3687.** Dimensiunile căzii sînt $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **3688.** $H=2R=2\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$, unde R este raza cilindrului, iar H este generatoarea lui. **3689.** $x=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}x_i$, $y=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}y_i$, $z=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}z_i$, unde $N=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}z_i\right)^2}$. Minimul sumei pătratelor distanțelor este egal cu $n-2N+\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2+z_i^2)$. **3690.** Unghiul de înclinare al generatoarelor conului față de bază este $\arcsin\frac{2}{3}$. **3691.** Unghiul de înclinare al fețelor laterale ale piramidelor față de baza ei este $\arcsin\frac{2}{3}$. **3692.** Laturile dreptunghiului sînt $\frac{2p}{3}$ și $\frac{p}{3}$. **3693.** Laturile triunghiului sînt $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ și $\frac{3p}{4}$. **3694.** Dimensiunile paralelipipedului sînt $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ și $\frac{R}{\sqrt{3}}$. **3695.** Înălțimea paralelipipedului este egală cu $\frac{1}{3}$ din înălțimea conului. **3696.** Dimensiunile paralelipipedului sînt $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$ și $\frac{2c}{\sqrt{3}}$. **3697.** Înălțimea paralelipipedului este $h=l\sin\alpha\times$

$\times \frac{\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{2}}$, dacă $\alpha \geq \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, şi $h=0$, dacă $0<\alpha<\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.
3698. Dimensiunile paralelipipedului sînt a, b şi $\frac{c}{2}$. **3699.**
$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **3700.** $d=\frac{1}{\pm\Delta}\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}$ unde $\Delta=$
$=\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}$. **3701.** $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. **3702.** Pă-
tratele semiaxelor $a^2=\lambda_1$ şi $b^2=\lambda_2$ sînt rădăcinile ecuaţiei $(1-\lambda A)\times$
$\times(1-\lambda C)-\lambda^2B^2=0$. **3703.** Pătratele semiaxelor $a^2=\lambda_1$, $b^2=\lambda_2$ şi $c^2=\lambda_3$
sînt rădăcinile ecuaţiei $\begin{vmatrix} A\lambda-1 & D\lambda & F\lambda \\ D\lambda & B\lambda-1 & E\lambda \\ F\lambda & E\lambda & C\lambda-1 \end{vmatrix}=0$. **3704.** $\frac{\pi ab}{C}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.
3705. $\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}}$. **3707.** Unghiul de incidenţă este
egal cu $\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, deviaţia razei este egală cu $2\times$
$\times\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha$. **3708.** Coeficienţii căutaţi a şi b se determină din
sistemul de ecuaţii $a\,[xx]+b\,[x1]=[xy]$, $a\,[x1]+bn=[y1)$, unde
$[xy]=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ etc. Problema are o soluţie bine determinată dacă
$\sum_{i\neq j}(x_i-x_j)^2\neq 0$. **3709.** $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2(\bar{x}\cdot\bar{y}-\overline{xy})}{[\overline{x^2}-(\bar{x})^2]-[\overline{y^2}-(\bar{y})^2]}$, $p=\bar{x}\cos\alpha+$
$+\bar{y}\sin a$, unde $\overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ etc. sînt valorile medii. **3710.** $4x-$
$-\frac{7}{2}$; $\Delta_{min}=\frac{1}{2}$.

CAPITOLUL VII

3711. $F(y)=1$, dacă $-\infty<y<0$; $F(y)=1-2y$, dacă $0\leq y\leq 1$;
$F(y)=-1$, dacă $1<y<+\infty$. **3712.** $F(y)$ este discontinuă pentru
$y=0$. **3713.** a) $\frac{\pi}{4}$; b) 1; c) $\frac{8}{3}$; d) $\ln\frac{2e}{1+e}$. **3715.** Nu. **3716.** Nu.
3717. $F'(x)=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_{x}^{x^2}y^2e^{-xy^2}\,dy$. **3718.** a) $-(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+$
$+e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha)+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\,dx$; b) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\sin\alpha(b+\alpha)-$
$-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha)$; c) $\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$; d) $2\int_{a\alpha}^{b\alpha}f'_u(u,v)\,dx$, unde
$u=x+\alpha$ şi $v=x-\alpha$; e) $2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin y^2\,dy+2\int_{0}^{\alpha^2}\sin(2\alpha x-\alpha^2)\cdot\cos(2x^2+$
$+\alpha^2)\,dx-2\alpha\int_{0}^{\alpha}dx\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy$. **3719.** $F''(x)=3f(x)+$
$+2xf'(x)$. **3720.** $F''(x)=2f(x)$, dacă $x\in(a,b)$ şi $F''(x)=0$, dacă
$x\bar{\in}(a,b)$. **3721.** $F''(x)=\frac{\Delta^2f(x)}{h^2}$, dacă $\Delta^2f(x)=f(x+2h)-2f(x+$
$+h)+f(x)$. **3722.** $F^{(n)}(x)=(n-1)!\,f(x)$. **3723.** $4x-\frac{11}{3}$. **3724.** $0{,}934+$
$+0{,}428x$ (aproximativ). **3725.** $\frac{dE}{dk}=\frac{E-F}{k}$; $\frac{dF}{dk}=\frac{E}{k(1-k^2)}-\frac{F}{k}$. **3729.**
$F''_{xy}(x,y)=x(2-3y^2)f(xy)-\frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^2y(1-y^2)f'(xy)$. **3732.**
$\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}$. **3733.** 0, dacă $|a|\leq 1$; $\pi\ln a^2$, dacă $|a|>1$. **3734.**
$\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}a\ln(1+|a|)$. **3735.** $\pi\arcsin a$. **3736.** $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$. **3737.**
$\ln\frac{b+1}{a+1}$. **3738.** a) $\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$; b) $\ln\frac{b+1}{a+1}$. **3741.** $a\geq 0$.

3742. $\operatorname{Max}(p,q)>1$. 3743. $\left|\frac{p-1}{q}\right|<1$. 3744. $p<1$. 3745. $n<0$ şi $n>\frac{1}{2}$. 3746. $p>\frac{1}{2}$. 3747. Convergentă pentru $a>0$ şi pentru $a=-\frac{2n-1}{2}\pi$ $(n=1,2,\ldots)$. 3748. Convergentă pentru $n>4$. 3749. Convergentă pentru $p>1$. 3750. Convergentă pentru $-1<n<2$. 3755. Uniform convergentă. 3757. Uniform convergentă. 3758. Uniform convergentă. 3759. Uniform convergentă. 3760. Uniform convergentă. 3761. Uniform convergentă. 3762. Nu este uniform convergentă. 3763. a) Uniform convergentă; b) nu este uniform convergentă. 3764. Nu este uniform convergentă. 3765. Uniform convergentă. 3766. a) Uniform convergentă; b) nu este uniform convergentă. 3767. Uniform convergentă. 3768. Nu este uniform convergentă. 3769. Uniform convergentă. 3770. Uniform convergentă. 3772. Nu. 3776. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3778. $a=\pm 1$. 3779. Este continuă. 3780. Este continuă. 3781. Este continuă. 3782. Este continuă. 3783. Este discontinuă pentru $\alpha=0$. 3784. $\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$. 3785. $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}$. 3788. $\ln\frac{b}{a}$. 3790. $\ln\frac{b}{a}$. 3791. 0. 3792. $\frac{\pi}{2}\times\ln\frac{a}{b}$. 3793. $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. 3794. $\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}$. 3795. $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$ $(m\neq 0)$. 3796. $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+m^2}{\alpha^2+m^2}$. 3797. $-\pi\left(1-\sqrt{1-\alpha^2}\right)$. 3798. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$. 3799. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\left(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2}\right)$. 3800. $\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)$ $(\beta\neq 0)$. 3801. $\frac{\pi}{2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. 3802. $\frac{2\pi}{3}\times[\alpha\beta(\alpha-\beta)+\alpha^3\ln\alpha+\beta^3\ln\beta-(\alpha^3+\beta^3)\ln(\alpha+\beta)]$ $(\alpha>0,\beta>0)$. 3803. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 3804. $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. 3805. $\frac{(a+2b^2)a_1+4abb_1-2a^2c_1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}$. 3806. $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}}$. 3807. $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2a}$. 3808. $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$. 3809. $\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 3810. $\frac{b\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$. 3811. $(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\cdot\frac{d^{2n}}{db^{2n}}(e^{-b^2})$. 3812. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta$. 3813. $\pi\frac{|\beta|}{2}-\sqrt{\pi\alpha}$. 3814. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right|$. 3815. 0, dacă $|\alpha|<|\beta|$; $\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$, dacă $|\alpha|=|\beta|$; $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$, dacă $|\alpha|>|\beta|$. 3816.

$\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha$. 3817. $\frac{\pi}{2}|\alpha|$. 3818. $\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|$. 3819. $\frac{\pi}{4}$. 3820. $\frac{3}{8}\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$. 3821. $\frac{\pi}{4}$. 3822. $\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+\beta}{k}-\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{k}+\frac{k}{4}\ln\frac{k^2+(\alpha-\beta)^2}{k^2+(\alpha+\beta)^2}$. 3823. $D(x)=1$ pentru $|x|<1$; $D(x)=\frac{1}{2}$ pentru $x=\pm 1$; $D(x)=0$ pentru $|x|>1$. 3824. a) $\pi\operatorname{sgn}a\cos ab$; b) $\pi\operatorname{sgn}a\sin ab$. 3825. $\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}$. 3826. $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha e^{-|\alpha|}$. 3827. $\frac{\pi}{4}(1-e^{-2})$. 3828. $\frac{\pi(1+|\alpha|)}{4}e^{-|\alpha|}$. 3829. $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}\cos\frac{b\alpha}{a}e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac-b^2}}$. 3830. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 3831. $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}}\times\sin\left(\frac{ac-b^2}{a}+\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}a\right)$. 3832. $\sqrt{\pi}\cos\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$. 3833. $\sqrt{\pi}\sin\left(a^2+\frac{\pi}{4}\right)$. 3835. a) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$; c) $\frac{1}{p-a}$ pentru $p>\alpha$; d) $\frac{1}{(p+\alpha)^2}$; e) $\frac{p}{p^2+1}$; f) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$; g) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}$. 3837. a) 1; b) $x^2+\frac{1}{2}$; c) e^{2ax+a^2}; d) $\frac{1}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}\cos ax$. 3839. $\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, unde $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$. 3843. $\frac{\pi}{8}$. 3844. $\frac{\pi a^4}{16}$. 3845. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 3846. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 3847. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 3848. $\frac{3\pi}{512}$. 3849. $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$. 3850. $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$. 3851. $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$ $(0<m<n)$. 3852. $\mathrm{B}(n-m,m)$ $(0<m<n)$. 3853. $\frac{a^{-p}}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{n},p-\frac{m+1}{n}\right)\left(0<\frac{m+1}{n}<p\right)$. 3854. $\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\mathrm{B}(m+1,n+1)$ $(m>-1,n>-1)$. 3855. $\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{m},1-\frac{1}{n}\right)$ $(n<0$ sau $n>1)$. 3856. $\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$ $(m>-1,n>-1)$. 3857. $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$ $(|n|<1)$. 3858. $\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{B}\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)$ $(n>0)$.

3859. $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n>0)$. 3860. $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)\left(\frac{m+1}{n}>0\right)$. 3861. $\Gamma(p+1)$ $(p>-1)$. 3832. $\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right]$ $(p>-1)$. 3863. $-\frac{\pi^2\cos p\pi}{\sin^2 p\pi}$ $(0<p<1)$.

3864. $\pi^3 \cdot \frac{1+\cos^2 p\pi}{\sin^3 p\pi}$ $(0<p<1)$. 3865. $\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{p\pi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{q\pi}{2}} \right|$ $(0<p<1, 0<q<1)$. 3866. $\pi \operatorname{ctg} \pi p$. 3867. $\frac{\pi}{2\beta} \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2\beta}$. 3868. $\ln \sqrt{2\pi}$. 3869. $\ln \sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1)$. 3870. $\frac{1}{\pi}\left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right)$. 3871. $\frac{1}{4n}$. 3876. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m) \cos \frac{m\pi}{2}}$ $(a>0)$. 3877. $\frac{\pi a^{m-1}}{2\Gamma(m) \sin \frac{m\pi}{2}}$ $(a>0)$. 3879. $a\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}\right)$. 3880. $\frac{2a^2}{n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. 3881. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda$. 3882. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\lambda}{\lambda} \sin \lambda x \, d\lambda$. 3883. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(x-a) - \sin \lambda(x-b)}{\lambda} \, d\lambda$. 3884. $f(x) = \frac{2h}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos a\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda x \, d\lambda$. 3885. $\frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \times \cos \lambda x \, d\lambda$. 3886. $\frac{x}{a^2+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \sin \lambda x \, d\lambda$. 3887. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda\pi}{1-\lambda^2} \times \sin \lambda x \, d\lambda$. 3888. $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2} \cos \lambda x \, d\lambda$. 3889. $f(x) = \frac{2A\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi n\lambda}{\omega}}{\lambda^2-\omega^2} \sin \lambda x \, d\lambda$. 3890. $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2+\alpha^2} \, d\lambda$. 3891. $f(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(\lambda-\beta)^2+\alpha^2} + \frac{1}{(\lambda+\beta)^2+\alpha^2} \right] \cos \lambda x \, d\lambda$. 3892. $f(x) = \frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{[(\lambda-\beta)^2+\alpha^2][(\lambda+\beta)^2+\alpha^2]} \, d\lambda$. 3893. $e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cos \lambda x \, d\lambda$.

389/ $xe^{-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \sin \lambda x \, d\lambda$. 3895. a) $e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{1+\lambda^2} \, d\lambda$ $(0 \leqq x < +\infty)$; b) $e^{-x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{1+\lambda^2} \, d\lambda$ $(0<x<+\infty)$. 3896. $F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}$. 3897. $F(x) = -i \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha x}{(x^2+\alpha^2)^2}$. 3898. $F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 3899. $F(x) = e^{-\frac{x^2+\alpha^2}{2}} \operatorname{ch} \alpha x$. 3900. a) $\varphi(y) = e^{-y}$ $(y \geqq 0)$; b) $\psi(y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{y}{1+y^2}$ $(y \geqq 0)$.

CAPITOLUL VIII

3901. $\frac{1}{4}$. **3902.** $S=\frac{40}{3}-\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $\overline{S}=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$; $13\frac{1}{3}$. **3903.** 9,88. Valoarea exactă este $2\pi(7-\sqrt{24})\approx 13{,}19$. **3904.** 0,402. Valoarea exactă este 0,4. **3905.** $\delta<0{,}00022$. **3906.** 1. **3907.** $\frac{1}{40}$. **3908.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **3910.** $I=F(A,B)-F(A,b)-F(a,B)+F(a,b)$. **3912.** a) Negativ; b) negativ; c) pozitiv. **3913.** $\frac{1}{4}$. **3914.** $1{,}96<I<2$. **3915.** $a^2+b^2+\frac{R^2}{2}$. **3916.** $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)\,dx$. **3917.** $\int_{-2}^{2} dx\int_{\frac{|x|}{2}}^{1} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)\,dx$. **3918.** $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{y-1}^{1} f(x,y)\,dx$. **3919.** $\int_{-1}^{1} dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_{-1}^{1} dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$. **3920.** $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,dx$. **3921.** $\int_{-1}^{1} dx\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$. **3922.** $\int_{-2}^{-1} dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_{-1}^{1} dx\Big\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy+$

$+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\Big\}+\int_1^2 dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$. **3924.** $\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)\,dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx$. **3925.** $\int_{-1}^{0} dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\,dx+\int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$. **3926.** $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx$.

3927. $\int_{-1}^{0} dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{\frac{y}{1-y}}} f(x,y)\,dx$.

3928. $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$. **3929.** $\int_0^a dy\Big\{\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\Big\}+\int_a^{2a} dy\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)\,dx$. **3930.** $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$.

3931. $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,dx-\int_{-1}^{0} dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\,dx$. **3932.** $\frac{p^5}{21}$. **3933.** $\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}$. **3934.** $\frac{a^4}{2}$. **3935.** $14a^4$. **3936.** $\frac{35\pi a^4}{12}$. **3937.** $\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$. **3938.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$.

$\int^{\pi} d\varphi\int_{|a|}^{|b|} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$. **3940.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$. **3941.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$. **3942.** In cazul cînd

domeniul de integrare este limitat de două cercuri concentrice cu centrul în originea coordonatelor şi de două raze pornind din originea coordonatelor. **3943.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{0}^{1} r\,dr \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$ **3944.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)}^{1} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} r\,dr \int\limits_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$ **3945.** $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r)\,dr = \frac{\pi}{12}\int\limits_{0}^{2\sqrt{2}} rf(r)\,dr + \int\limits_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{2}{r}\right) rf(r)\,dr.$ **3946.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{0}^{1} r\,dr \int\limits_{0}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,d\varphi.$ **3947.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr = \int\limits_{0}^{a} r\,dr \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$ **3948.** $\int\limits_{0}^{a} dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi, r)\,d\varphi.$ **3949.** $\int\limits_{0}^{a} dr \int\limits_{\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2}{a^2}} f(\varphi,\ r)\,d\varphi.$ **3950.** $\int\limits_{0}^{a} dr \int\limits_{r}^{a} f(\varphi,\ r)\,d\varphi.$ **3951.**

$2\pi\int\limits_{0}^{1} rf(r)\,dr.$ **3952.** $\pi\int\limits_{0}^{1} rf(r)\,dr + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{r}\right) rf(r)\,dr.$ **3953.** $\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg}\varphi)\cos^2\varphi\,d\varphi.$ **3954.** $\frac{2\pi a^3}{3}.$ **3955.** $-6\pi^2.$ **3956.** $\frac{6}{5}\times \frac{b^2+b(b+h)+(b+h)^2+(2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}\,(\sqrt{a}+\sqrt{a+h})\,(\sqrt{b}+\sqrt{b+h})}; \ \frac{3}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$ **3957.** $\int\limits_{a}^{b} u\,du \times \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(u, uv)\,dv.$ **3958.** $\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} du \int\limits_{-u}^{4-u} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right) dv.$ **3959.** $4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 v\cos^3 v\,dv \times \int\limits_{0}^{a} uf(u\cos^4 v,\ u\sin^4 v)\,du.$ **3961.** $u=xy,\ v=x-y.$ **3962.** $\int\limits_{-1}^{1} f(u)\,du.$ **3963.** $2\int \sqrt{1-u^2}\,f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)\,du.$ **3964.** $\ln 2\cdot\int\limits_{1}^{2} f(u)\,du.$ **3965.** $\frac{\pi}{2}.$ **3966.** 1. **3967.** $\frac{2}{3}\pi ab.$ **3968.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$ **3969.** $543\frac{11}{15}.$ **3970.** $1\frac{37}{128}-\ln 2.$ **3971.** $2\pi.$ **3972.** $\frac{9}{16}\pi.$ **3973.** $\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}.$ **3974.** $\frac{4}{3}\pi + 4\ln(1+\sqrt{3}).$ **3975.** $5\frac{1}{4}.$ **3976.** $\frac{2}{3}+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}.$ **3978.** $f(0,\ 0).$ **3979.** $\frac{2}{t}F(t),$ dacă $t>0.$ **3980.** $2\iint\limits_{(x-t)^2+(y-t)^2\le 1} \frac{x+y+t}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy.$ **3981.** $F'(t) = \int\limits_{0}^{2\pi} tf(t\cos\varphi,\ t\sin\varphi)\,d\varphi.$ **3984.** $\left(\frac{15}{8}-2\ln 2\right)a^2.$ **3985.** $\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$ **3986.** $\pi a^2.$ **3987.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$ **3988.** $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2}).$ **3989.** $\frac{\pi a^2}{4}.$ **3990.** $\frac{a^2}{4}\left[(5\sqrt{7}-\pi)+2\arcsin\frac{3}{4}\right].$ **3991.** $\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$ **3992.** $\frac{ab}{3}\times\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}\right].$ **3993.** $\frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$ **3994.** $\frac{a^4bk\,(ak+2bh)}{6h^2\,(ak+bh)^2}.$ **3995.** $\frac{ab}{70}.$ **3996.** $\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}.$ **3997.** $\frac{a^2}{2}\ln 2.$ **3998.** $\frac{4}{3}(q-p)(s-r).$

3999. $15ab\left(\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{6}\right)\approx 1{,}815ab$. 4000. $\frac{c^2}{6}(\sqrt{10}-2)\arcsin\frac{1}{3}$. 4001. $\frac{\pi}{|\delta|}$. 4002. $\frac{c^2}{4}[(v_2-v_1)(\operatorname{sh}2u_2-\operatorname{sh}2u_1)-(u_2-u_1)(\sin 2v_2-\sin 2v_1)]$. 4003. $\frac{2}{3}\pi a^2$. 4004. $\frac{6\pi}{7\sqrt{7}}$. 4007. $\frac{5}{6}$. 4008. $\frac{\pi R^2 a}{4}-\frac{2}{3}R^3$. 4009. $\frac{88}{105}$. 4010. π. 4011. π. 4012. $\frac{17}{12}-\ln 2$. 4013. $\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)a^3$. 4014. $\frac{\pi}{8}$. 4015. $\frac{45}{32}\pi$. 4016. $\frac{16}{9}a^3$. 4017. $\frac{\pi a^3}{8}$. 4018. $\pi(1-e^{-R^2})$. 4019. $2a^2c\cdot\frac{(\beta-\alpha)(\pi-2)}{\pi^2}$. 4020. $\frac{\pi}{8}$. 4021. $\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2})$. 4022. $\frac{4}{3}\pi abc(2\sqrt{2}-1)$. 4023. $\frac{3\pi abc}{8}$. 4024. $\frac{2}{3}\pi abc$. 4025. $\frac{abc}{3}$. 4026. $\frac{2}{9}abc(3\pi+28-16\sqrt{2})$. 4027. $\frac{\pi(b^3-a^3)}{12}$. 4028. $\frac{9}{2}a^4$. 4029. $\frac{3}{4}$. 4030. $\frac{a^2c}{\pi}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. 4031. $\frac{8}{35}$. 4032. $\frac{75}{256}\pi abc$. 4033. $\frac{\pi^4a^2c}{8}$. 4034. $\frac{abc}{3n^2}\times\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}$. 4035. $\frac{abc}{2m+n}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)}$. 4036. $\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1)$. 4037. $16a^2$. 4038. $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. 4039. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 4040. $8a^2$. 4041. $\pi\sqrt{2}$. 4042. $\frac{\pi a^2}{2}$. 4043. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right)+\frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. 4044. $\frac{a^2}{9}(20-3\pi)$. 4045. $2a^2$. 4046. $S=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2$; $V=\frac{8\pi}{\sqrt{3}}a^3$. 4047. $(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2$, unde φ_1, φ_2 sînt longitudinile meridianelor, ψ_1, ψ_2 sînt latitudinile paralelelor, iar R este raza sferei. 4048. $\pi\left\{a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right\}$. 4049. $S=a(\varphi_2-\varphi_1)\cdot[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$; $4\pi^2ab$. 4050. $\omega=\arcsin\frac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$; $\omega\approx\frac{bc}{a^2}$. 4051. $\frac{\varrho_0 a^2}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})]$. 4052. $x_0=-\frac{a}{2}$; $y_0=\frac{8}{5}a$. 4053. $x_0=y_0=\frac{a}{5}$. 4054. $x_0=y_0=\frac{256}{315\pi}a$. 4055. $x_0=\frac{a^2b}{14c}$; $y_0=\frac{ab^2}{14c}$. 4056. $x_0=y_0=\frac{\pi a}{8}$. 4057. $x_0=\frac{5}{6}a$; $y_0=\frac{16}{9\pi}a$. 4058. $x_0=\pi a$; $y_0=\frac{5}{6}a$. 4059. $x_0=-\frac{a}{5}$; $y_0=0$.

4060. Parabola $y_0=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0}$. 4061. $I_x=\frac{bh^3}{12}$; $I_y=\frac{h(b_1^3+b_2^3)}{12}$ $(b=b_1+b_2)$. 4062. $I_x=I_y=\frac{a^4}{16}(16-5\pi)$. 4063. $I_x=\frac{21\pi a^4}{32}$; $I_y=\frac{49\pi a^4}{32}$. 4064. $I_x=I_y=\frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}$. 4065. $I_x=I_y=\frac{9}{8}a^4$. 4066. $I_0=\frac{\pi a^4}{8}$. 4069. $I_\alpha=\frac{a^4}{288}(8\cos^2\alpha+3\sqrt{3}\sin^2\alpha)$. 4070. $X=ah^2$; $Y=0$, unde X, Y sînt proiecţiile forţei pe axele de coordonate Ox şi Oy. 4071. $P_1=\pi a^2\delta\left(h-\frac{2}{3}a\right)$; $P_2=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2}{3}a\right)$. 4072. Proiecţiile forţei pe axele de coordonate Oxz, situate în planul vertical care trece prin axa cilindrului, dintre care axa Ox este orizontală iar axa Oz este verticală, sînt respectiv: $X_1=-\frac{\pi a^2}{4}\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_1=-\frac{\pi a^2}{4}\left(h-\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$; $X_2=\frac{\pi a^2}{4}\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\sin\alpha$, $Z_2=\frac{\pi a^2}{4}\times\left(h+\frac{b}{2}\cos\alpha\right)\cos\alpha$. 4073. Proiecţiile forţei de atracţie pe axele de coordonate $Oxyz$ sînt respectiv: $X=0$, $Y=0$, $Z=-\frac{2kmM}{a^2h}\{|b|-|b-h|+\sqrt{a^2+(b-h)^2}-\sqrt{a^2+b^2}\}$, unde k este constanta gravitaţională. 4074. $p_m=\frac{1}{2}p_0$. 4075. $A=\frac{kp}{12}\left\{2ab\sqrt{a^2+b^2}+a^3\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+b^3\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right\}$. 4076. $\frac{1}{364}$. 4077. $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. 4078. $\frac{1}{48}$. 4079. $\frac{4}{5}\pi abc$. 4080. $\frac{\pi}{6}$. 4081. $\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)\,dy+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dy\right\}=\int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\,dx+\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dx\right\}$. 4082. $\int_{-1}^1 dx\int_{|x|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy=\int_0^1 dz\int_{-z}^{z} dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx$. 4083. $\int_0^1 dx\left\{\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)\,dy+\int_{x^2}^{x^2+1} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dy\right\}=$
$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx+\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)\,dx\right\}+$

$+\int\limits_1^2 dz \int\limits_{\sqrt{z-1}}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{1} f(x, y, z)\, dx$. **4084.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-\zeta)^2 f(\zeta)\, d\zeta$. **4085.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (2-z^2) f(z)\, dz + \frac{1}{2}\int\limits_1^2 (2-z)^2 f(z)\, dz$. **4086.** $F(A, B, C) - F(A, B, c) - F(A, b, C) - F(a, B, C) + F(A, b, c) + F(a, B, c) + F(a, b, C) - F(a, b, c)$. **4087.** $\frac{\pi}{10}$. **4088.** $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$.
4089. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\varphi}} \cos\psi\, d\psi \int\limits_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 f(r)\, dr$. **4090.** $\frac{\pi^2 abc}{4}$. **4091.** $\frac{16\pi}{3}$.
4092. $\frac{2}{27}\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right) h^4\sqrt{h}$. **4093.** $\frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right]$. **4094.** $\frac{6}{5}$. **4095.** $3(e-2)$. **4096.** $u=\frac{4\pi}{3}\times \frac{R^3}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+\theta R}}$, unde $|\theta|<1$. **4098.** a) $F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2)$; b) $F'(t)=\frac{3}{t} F(t)+3t^5 \iiint\limits_V f'(xyz)\, dx\, dy\, dz$, unde $t>0$ şi $V=\{0\le x\le t, 0\le y\le t, 0\le z\le t\}$. **4099.** 0, dacă unul din numerele m, n şi p este impar; $\frac{4\pi}{m+n+p+3}\cdot\frac{(m-1)!!\,(n-1)!!\,(p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}$, dacă numerele m, n şi p sînt pare.
4100. $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$. **4101.** $\frac{3}{35}$. **4102.** $\frac{7}{24}$. **4103.** $\frac{2}{3}a^3(3\pi-4)$. **4104.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **4105.** $\frac{a^3}{24}(2+3\pi)$. **4106.** $\frac{32}{3}\pi$. **4107.** $\frac{\pi a^3}{3}$.
4108. $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$. **4109.** $\frac{1}{2}$. **4110.** $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3)$. **4111.** $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}$.
4112. $\frac{\pi^2}{4}abc$. **4113.** $\frac{5\pi abc}{12}(3-\sqrt{5})$. **4114.** $\frac{8\pi}{5}abc$. **4115.** $\frac{abc}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.
4116. $\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **4117.** $\frac{abc}{554\,400}$. **4118.** $\frac{abc}{3}$. **4119.** $\frac{9}{4}a^2$. **4120.** $\frac{1}{3}(b^3-a^3)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$. **4121.** $\frac{4\pi}{3}a^3$. **4122.** $\frac{\pi abc^2}{3h}(1-e^{-1})$.
4123. $\frac{3}{2}abc$. **4124.** $5abc\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{3}\right)$. **4125.** 37 : 27. **4126.** $V=\frac{5\pi a^3}{6}$; $S=\frac{\pi a^2}{6}(6\sqrt{2}+5\sqrt{5}-1)$. **4127.** $\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}$. **4128.** $\frac{4\pi}{3|\Delta|}$.

4129. $\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{abc^2}{h}$. **4130.** $\frac{abc}{mn+mp+np}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)}$. **4131.** $\frac{3}{2}$.
4132. $4\pi\rho_0\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right)e^{-k}$. **4133.** $\left(0, 0, \frac{3}{4}c\right)$. **4134.** $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$; $z_0=\frac{7}{30}a^2$. **4135.** $x_0=\frac{7}{18}p$; $y_0=0$; $z_0=\frac{7}{176}p$. **4136.** $x_0=\frac{3}{8}a$; $y_0=\frac{3}{8}b$; $z_0=\frac{3}{8}c$. **4137.** $x_0=y_0=0$; $z_0=\frac{3a}{8}$. **4138.** $x_0=y_0=1$; $z_0=\frac{5}{3}$. **4139.** $x_0=\frac{9\pi}{448}a$; $y_0=\frac{9\pi}{448}b$; $z_0=\frac{9\pi}{448}c$. **4140.** $x_0=y_0=0$; $z_0=\frac{7}{20}$. **4141.** $\frac{x_0}{a}=\frac{y_0}{b}=\frac{z_0}{c}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)}$. **4142.** $x_0=\alpha$; $y_0=\beta$; $z_0=\gamma$. **4143.** $I_{xy}=\frac{abc^3}{60}$; $I_{yz}=\frac{a^3bc}{60}$; $I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}$. **4144.** $I_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3$; $I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc$; $I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c$. **4145.** $I_{xy}=\frac{\pi abc^3}{5}$; $I_{yz}=\frac{\pi a^3bc}{20}$; $I_{xz}=\frac{\pi ab^3c}{20}$. **4146.** $I_{xy}=\frac{2abc^3}{225}(15\pi-16)$; $I_{xz}=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272)$; $I_{yz}=\frac{2a^3bc}{1575}(105\pi-92)$. **4147.** $I_{xy}=\frac{7}{2}\pi abc^3$; $I_{xz}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$; $I_{yz}=\frac{4}{3}\pi a^3bc$. **4148.** $I_z=\frac{14}{15}$. **4149.** $I_z=\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$. **4150.** $\frac{4}{9}MR^2$.
4153. $I=\frac{M}{3}\left(a^2+\frac{2}{3}h^2\right)$, unde $M=2\pi\rho_0 a^2 h$ — masa cilindrului.
4154. $I_0=\frac{\pi^2 a^5\rho_0}{8}$. **4155.** $u=2\pi\rho_0\left(R^2-\frac{r^2}{3}\right)$, dacă $r\le R$; $u=\frac{4\pi R^3\rho_0}{3r}$, dacă $r>R$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **4156.** $u=4\pi\int\limits_{R_1}^{R_2} f(\rho)\min\left(\frac{\rho^2}{r}, \rho\right)d\rho$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. **4157.** $u=\pi\rho_0\times\Big\{(h-z)\sqrt{a^2+(h-z)^2}+z\sqrt{a^2+z^2}-[(h-z)|h-z|+z|z|]+a^2\times\ln\left|\frac{h-z+\sqrt{a^2+(h-z)^2}}{z-\sqrt{a^2+z^2}}\right|\Big\}$. **4158.** $X=0$; $Y=0$; $Z=-\frac{kMm}{a^2}$, dacă $a\ge R$, $Z=-\frac{kMm}{R^3}a$, dacă $a<R$. **4159.** $X=0$; $Y=0$; $Z=$

$= -2\pi\rho_0 k\left\{\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-(|z|-|h-z|)\right\}$. **4160.** $X=0;\ Y=0;\ Z=-\pi k\rho_0 R\sin^2\alpha$. **4161.** Convergentă pentru $p>1$. **4162.** Convergentă pentru $p>1$ și $q>1$. **4163.** Convergentă pentru $p>\frac{1}{2}$. **4164.** Convergentă pentru $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$. **4165.** Divergentă. **4169.** $\frac{1}{(p-q)(q-1)}\ (p>q>1)$. **4170.** $\frac{1}{p-1}\ (p>1)$. **4171.** 2π. **4172.** $\frac{\pi}{p-1}\ (p>1)$. **4173.** $\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$. **4174.** $\frac{1}{2}$. **4175.** π. **4176.** $\frac{\pi}{2}$. **4177.** $\frac{\pi}{2}$. **4178.** $\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}$, unde $\delta=\begin{vmatrix}a & b\\ b & c\end{vmatrix}$ și $\Delta=\begin{vmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}$. **4179.** $\frac{\pi}{e}ab$. **4180.** $-\frac{\pi\varepsilon a^2b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$. **4181.** Convergentă. **4182.** Convergentă pentru $p<1$. **4183.** Convergentă pentru $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$. **4184.** Convergentă pentru $p<1$. **4185.** Convergentă pentru $p<1$. **4187.** $\frac{\pi}{2}$. **4188.** πa. **4189.** $-\frac{\pi^2}{2}\ln 2$. **4190.** 2. **4191.** Convergentă pentru $p>\frac{3}{2}$. **4192.** Convergentă pentru $p<\frac{3}{2}$. **4193.** Convergentă pentru $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$. **4194.** Convergentă pentru $p<\frac{1}{2}$. **4195.** Convergentă pentru $p<1$. **4196.** $(1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}\ (p<1,\ q<1,\ r<1)$. **4197.** $\frac{4\pi}{3}$. **4198.** $2\pi B\left(\frac{3}{2},\ 1-p\right)(p<1)$. **4199.** $\pi^{\frac{3}{2}}$. **4200.** $\sqrt{\frac{\pi^3}{|\Delta|}}$, unde $\Delta=|a_{ij}|$. **4204.** a) $\frac{n}{3}$; b) $\frac{n(3n+1)}{12}$. **4205.** $\frac{a^n}{n!}$. **4206.** $\frac{1}{2^n n!}$. **4207.** $\frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}$. **4208.** $\frac{2^n h_1h_2\dots h_n}{|\Delta|}$. **4209.** $\frac{a_1a_2\dots a_n}{n!}$. **4210.** $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a_1a_2\dots a_n$. **4211.** $\frac{\pi^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. **4212.** $\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}a^{n-1}h^3}{12\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

4213. $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$. **4218.** $R^n\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1 f(\sqrt{u})\,u^{\frac{n}{2}-1}du$. **4219.** $u=\frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2R^5$. **4220.** $\sqrt{\frac{\pi^n}{|\delta|}}\,e^{-\frac{\Delta}{\delta}}$, unde $\delta=|a_{ij}|$ și $\Delta=\begin{vmatrix}a_{ij} & b_i\\ b_j & c\end{vmatrix}$ — determinant bordat. **4221.** $1+\sqrt{2}$. **4222.** $\frac{256}{15}a^3$. **4223.** $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$. **4224.** $\frac{a^3}{6}(\mathrm{ch}^{\frac{3}{2}}2t_0-1)$. **4225.** $4a^{\frac{7}{3}}$. **4226.** $2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$. **4227.** $2a^2(2-\sqrt{2})$. **4228.** $\frac{2ka^2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$. **4229.** $2a^2$. **4230.** $\frac{\pi}{a}$. **4231.** 5. **4232.** $\sqrt{3}$. **4233.** $\frac{1}{2}|x_0|+2|z_0|$, unde $|x_0|<a$. **4234.** $\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3z_0^4}{a}}+2\sqrt[3]{\frac{az_0^2}{3}}\right)$. **4235.** $\left(1+\frac{2z_0}{3c}\right)\sqrt{cz_0}$. **4236.** $2a\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$. **4237.** $\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}$. **4238.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **4239.** $\frac{1}{3}\left[(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]$. **4240.** $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}[600-36\sqrt{2}-49\ln(9-4\sqrt{2})]$. **4241.** $2b\left(b+a\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, unde $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — excentricitatea elipsei. **4242.** $\frac{a}{8}\left[(3\sqrt{3}-1)+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right]$. **4243.** $x_0=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}}$; $y_0=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}$. **4244.** $x_0=y_0=\frac{4}{3}a$. **4245.** $x_0=y_0=z_0=\frac{4a}{3\pi}$. **4246.** $x_0=\frac{2}{5}$; $y_0=-\frac{1}{5}$; $z_0=\frac{1}{2}$. **4247.** $I_x=I_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$; $I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$. **4248.** a) 0; b) $\frac{2}{3}$; c) 2. **4249.** a) 2; b) 2; c) 2. **4250.** $-\frac{4}{3}$. **4251.** $\frac{4}{3}$. **4252.** 0. **4253.** $-2\pi a^2$. **4254.** -2π. **4255.** 0. **4256.** 0. **4257.** $1-\frac{\pi}{4}$. **4258.** 8. **4259.** 12. **4260.** 4. **4261.** -2. **4262.** $\int_0^{a+b}f(u)\,du$. **4263.** $-\frac{3}{2}$. **4264.** 9. **4265.** $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. **4266.** 64. **4267.** 1. **4268.** $\pi+1$. **4269.** $e^a\cos b-1$. **4271.** $z=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$. **4272.**

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3y\ \ x}{2x\sqrt{2}}$. **4273.** $z=-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+\ln(x+y)+C$. **4274.** $z=e^{x+y}(x+y+1)+ye^x+C$. **4275.** $z=\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}+C$. **4276.** $z=\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n\partial y^m}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)+C$. **4278.** $|I_R|\leq\frac{8\pi}{R^2}$. **4279.** $\frac{1}{35}$. **4280.** $-\pi a^2$. **4281.** $2\pi\sqrt{2}a^2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$. **4282.** $-\frac{\pi a^3}{4}$. **4283.** -4. **4284.** $-53\frac{7}{12}$. **4285.** 0. **4286.** $b-a$. **4287.** $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy+\int_{z_1}^{z_2}\chi(z)\,dz$. **4288.** $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2}f(u)\,du$. **4289.** $\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}uf(u)\,du$. **4290.** $u=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C$. **4291.** $u=x-\frac{x}{y}+\frac{xy}{z}+C$. **4292.** $u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\operatorname{arctg}\frac{z}{x+y}+C$. **4293.** $A=-mg(z_2-z_1)$. **4294.** $A=-\frac{k}{2}(a^2-b^2)$. **4295.** $A=k\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$, unde $r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2}$ $(i=1,\ 2)$. **4296.** $I=\iint_S y^2\,dx\,dy$. **4297.** $-46\frac{2}{3}$. **4298.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **4299.** $-2\pi ab$. **4300.** $-\frac{1}{5}(e^\pi-1)$. **4301.** 0. **4302.** $I_1-I_2=2$. **4303.** $\frac{\pi ma^2}{8}$. **4304.** $mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1)$. **4305.** $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=kx+\frac{\partial u}{\partial y}$, unde u este o funcţie de două ori derivabilă, iar k o constantă. **4306.** $\frac{\partial}{\partial x}(xF(x,\ y)]=\frac{\partial}{\partial y}[yF(x,\ y)]$. **4307.** 1) $I=0$; $I=2\pi$. **4308.** πab. **4309.** $\frac{3}{8}\pi ab$. **4310.** $\frac{a^2}{3}$. **4311.** $\frac{3}{2}a^2$. **4312.** a^2. **4313.** $\frac{1}{3}+\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$. **4314.** $\frac{a^2}{2}\mathrm{B}(2m+1,\ 2n+1)$. **4315.** $\frac{ab}{2n}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$. **4316.** $\frac{ab}{n}\left[1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\right]$. **4317.** $\frac{abc^2}{2(2n+1)}$. **4318.** $\pi(n+1)(n+2)r^2$; $6\pi r^2$. **4319.** $\pi(n-1)\times$

$\times(n-2)r^2$; $6\pi r^2$. **4320.** $4a^2$. **4321.** $\operatorname{sgn}(ad-bc)$. **4322.** $I=\sum\operatorname{sgn}\frac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(x,\ y)}$, unde suma este extinsă la toate punctele de intersecţie ale curbelor: $\varphi(x,\ y)=0$ şi $\psi(x,\ y)=0$, situate în interiorul conturului C. **4324.** $I=2S$, unde S este aria limitată de conturul C. **4325.** $X'_x(x_0,\ y_0)+Y'_y(x_0,\ y_0)$. **4326.** Proiecţiile forţei pe axele de coordonate sînt $X=0$; $Y=\frac{2kmM}{\pi a^2}$, unde k este constanta gravitaţională. **4327.** $u=2\pi\varkappa R\ln\frac{1}{R}$, dacă $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\leq R$; $u=2\pi\varkappa R\ln\frac{1}{\rho}$, dacă $\rho>R$. **4328.** $I_1=\frac{\pi}{m}\rho^m\cos m\varphi$. $I_2=\frac{\pi}{m}\rho^m\sin m\varphi$, dacă $0\leq\rho\leq 1$; $I_1=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\cos m\varphi$, $I_2=\frac{\pi}{m}\rho^{-m}\sin m\varphi$, dacă $\rho>1$. **4329.** $u=2\pi$, dacă $A(x,\ y)$ este situat în interiorul conturului C; $u=\pi$, dacă punctul $A(x,\ y)$ este situat pe conturul C; $u=0$, dacă punctul $A(x,\ y)$ este situat în exteriorul conturului C. **4330.** $K_1=\pi\rho^m\cos m\varphi$, $K_2=\pi\rho^m\sin m\varphi$, dacă $0\leq\rho<1$; $K_1=0$, $K_2=0$, dacă $\rho=1$; $K_1=-\frac{\pi}{\rho^m}\cos m\varphi$, $K_2=-\frac{\pi}{\rho^m}\sin m\varphi$, dacă $\rho>1$. **4339.** $Q=\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$; $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$. **4340.** $H_x=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\eta-y)\,dz-(\zeta-z)\,dy$; $H_y=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\zeta-z)\,dx-(\xi-x)\,dz]$; $H_z=ki\oint_C\frac{1}{r^3}[(\xi-x)\,dy-(\eta-y)\,dx]$. **4341.** $I_1-I_2=(4\pi-2\sqrt{3})a^4$. **4342.** $4\pi\sqrt{2}a^3$. **4343.** πa^3. **4344.** $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$. **4345.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$. **4346.** $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$. **4347.** $\frac{4\pi}{3}abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$. **4348.** $\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})]$. **4349.** $\frac{\pi a^4}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha\left(0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}\right)$. **4350.** $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$. **4352.** $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$. **4353.** $\frac{4}{3}\pi\rho_0 a^4$. **4354.** $\frac{\pi\rho_0 a(3a^2+10b^2)\sqrt{a^2+b^2}}{12}$. **4355.** $x_0=\frac{a}{2}$; $y_0=0$; $z_0=\frac{9}{16}a$. **4356.** $x_0=y_0=\frac{a}{2\sqrt{2}}$; $z_0=\frac{a}{\pi}(\sqrt{2}+1)$. **4357.** Proiecţiile

forţei gravitaţionale pe axele de coordonate sînt: $X=0$; $Y=0$; $Z=\pi k m\rho_0 \ln\frac{a}{b}$. **4353.** $u=4\pi\rho_0 \min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right)$, unde $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}$. **4359.** $F(t)=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$, dacă $|t|\leq\sqrt{3}$; $F|t|=0$, dacă $|t|>\sqrt{3}$. **4360.** $F(t)=\frac{\pi(8-5\sqrt{2})}{6}t^4$. **4361.** $F=0$, dacă $t\leq r-a$; $F=\frac{\pi t}{r}[a^2-(r-t)^2]$, dacă $r-a<t<r+a$; $F=0$, dacă $t>r+a\ (t\geq 0)$. **4362.** $4\pi a^3$. **4363.** $\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right]abc$. **4364.** 0. **4365.** $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$. **4366.** $\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3$. **4367.** $-\pi a^2\sqrt{3}$. **4368.** $\frac{h^3}{3}$. **4369.** 2 arii S. **4370.** 0. **4371.** $-2\pi a(a+h)$. **4372.** $2\pi R r^2$. **4373.** $-\frac{9}{2}a^3$. **4374.** 0. **4376.** $3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$. **4377.** 0. **4378.** $2\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **4379.** $\iiint_V \Delta u\,dx\,dy\,dz$, unde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4380.** 0. **4384.** $\frac{4\pi}{3}|(aa_1+bb_1)c|$. **4385.** $\frac{2}{9}(1+3\pi)a^3$. **4387.** $3a^4$. **4388.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **4389.** 1. **4390.** $-\frac{\pi h^4}{2}$. **4392.** a) $I=0$; b) $I=4\pi$. **4401.** a) $\operatorname{grad} u(0)=3\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{k}$, $\cos\alpha=\frac{3}{7}$, $\cos\beta=-\frac{2}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{6}{7}$; b) $\operatorname{grad} u(A)=6\vec{i}+3\vec{j}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\gamma=0$; c) $\operatorname{grad} u(B)=3\vec{i}$, $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$; $\operatorname{grad} u=0$ în punctul $M(-2, 1, 1)$. **4402.** a) $xy=z^2$; b) $x=y=0$ şi $x=y=z$; c) $x=y=z$. **4403.** $r=1$. **4404.** $\frac{4(x^2+y^2)}{u^2-256}+\frac{4z^2}{u^2}=1\ (u\geq 16)$; $\frac{x^2+y^2}{960}+\frac{z^2}{1024}=1$; $\max u=20$. **4405.** $\cos\varphi=-\frac{8}{9}$. **4406.** Suprafeţele de nivel sînt pînzele conurilor; suprafeţele pentru care modulul gradientului este constant sînt toruri; $\inf u=0$, $\sup u=1$; $\inf|\operatorname{grad} u|=0$, $\sup|\operatorname{grad} u|=\frac{1}{2}$. **4407.** $\frac{|\Delta c|}{|\operatorname{grad} u(x_0, y_0, z_0)|}$. **4409.** a) $\frac{\vec{r}}{r}$; b) $2r$; c) $-\frac{\vec{r}}{r^3}$. **4410.** $f'(r)\frac{\vec{r}}{r}$. **4411.** c. **4412.**

$2\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{c})-2\vec{c}(\vec{c}\cdot\vec{r})$. **4416.** $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2u}{r}$, unde $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial u}{\partial r}=|\operatorname{grad} u|$, dacă $a=b=c$. **4417.** $\frac{\partial u}{\partial l}=-\frac{\cos(\vec{l}, \vec{r})}{r^2}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=0$, dacă $\vec{l}\perp\vec{r}$. **4418.** $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$; $\frac{\partial u}{\partial l}=0$, dacă $\operatorname{grad} u\perp\operatorname{grad} v$. **4419.** $\vec{a}=\frac{\vec{i}(\sqrt{x^2+y^2}+yz)-\vec{j}(\sqrt{x^2+y^2}+xz)+\vec{k}(x-y)z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$. **4420.** $y=c_1x$, $z=c_2x^2$. **4423.** 0. **4425.** $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=\Delta u$, unde $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. **4426.** $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$; $f(r)=c+\frac{c_1}{r}$, unde c şi c_1 sînt constante. **4427.** a) 3; b) $\frac{2}{r}$. **4428.** $\frac{f'(r)}{r}(\vec{c}\cdot\vec{r})$. **4429.** $3f(r)+rf'(r)$; $f(r)=\frac{c}{r^3}$, unde c — constantă. **4430.** a) $u\Delta u+(\operatorname{grad} u)^2$; b) $u\Delta v+\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v$, unde Δu este operatorul lui Laplace. **4431.** $\operatorname{div}\vec{v}=0$; $\operatorname{div}\vec{w}=-2\omega^2$, dacă la momentul dat punctul aparţine corpului. **4432.** 0, în exteriorul centrelor atractive. **4433.** $\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right]$, unde a_r, a_φ sînt componentele vectorului $\vec{a}$ într-un spaţiu cartezian de coordonate $Or\varphi$. **4434.** $\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{LMN}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{MN}{L}a_u\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{NL}{M}a_v\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{LM}{N}a_w\right)\right]$, unde a_u, a_v, a_w sînt coordonatele vectorului $\vec{a}$ în spaţiul $Ouvw$, iar $L=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2}$, $M=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2}$, $N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial w}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial w}\right)^2}$. Dacă r, φ, z sînt coordonatele cilindrice $\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(ra_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial a_z}{\partial z}\right]$; dacă ρ, θ şi φ sînt coordonatele sferice, atunci $\operatorname{div}\vec{a}=\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(a_\rho\rho^2\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(a_\theta\sin\theta)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{da_\varphi}{\partial\varphi}\right]$. **4436.** a) 0; b) 0. **4437.** a) $\frac{f'(r)}{r}[\vec{r}\times\vec{c}]$; b) $2f(r)\vec{c}+\frac{f'(r)}{r}[\vec{c}(\vec{r}\cdot\vec{r})-\vec{r}(\vec{c}\cdot\vec{r})]$. **4439.** a) 0; b) 0. **4440.**

$\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{a}$, dacă la momentul dat punctul aparţine corpului. **4441.** ln $\frac{a}{b}$. … πh^3. **4442.** a) 0; b) 0. **4443.** π. **4444.** $\frac{3\pi}{8}$. **4445.** 0. **4447.** … $= \frac{\pi}{18}(3-t^2)^2$, … **4450.** $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)$, unde c este … … $\frac{\pi(8-5\sqrt{2})}{6} t^4$. **4361.** … ensitatea corpului. **4452.** $2\pi^2 b^2$. **4453.** … $[a^f(r)$ … $]$, dacă $r-a<t<$ … $\Gamma=0$; b) $\Gamma=2\pi n$, unde n este numărul tururilor conturului … urul axei Oz. **4456.** $Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$; $\Gamma = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$; $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. **4457.** $u = xyz(x+y+z)+C$. **4458.** $u = \frac{m}{r}$. **4459.** $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i}$, unde r_i este distanţa punctului curent $M(x, y, z)$ la punctele … $(i=1, 2, \ldots, n)$. **4460.** $u(x, y, z) = \int_{r_0}^{r} t f(t)\,dt$, unde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Lusi → 91

VASILE

… $\frac{\partial u}{\partial l} =$ … dacă grad u … $\frac{xz) + \vec{k}(x-y)z}{+y^2}$. **4420.**

DATA RESTITUIRII		
2.04.2002		10.03.2005
8.01.2003.		30.03.2005
28.01.2003.		11.07.2005
3.04.2003		12.01.2005
5.05.2003		16.02.2006
4 Iunie 2003		27.02.2006
22.03.2004		22.06.2006
17.03.2004		28.05.2007
6.05.2004		27.06.2007
25.05.2004		10.11.2008
17.06.2004		03.12.2008
21.02.2005		